

Seminar
Facetten der Geometrischen Gruppentheorie

Følner Definition der amenablen Gruppen

David Dyschermann
21. November 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitung	3
2	Folner Definition der amenablen Gruppen	3
2.1	Definitionen und Hauptaussagen	3
2.2	Beispiele zu den Definitionen	4
2.3	Beweise der Hauptaussagen	5

1 Vorbereitung

Ziel dieser Ausarbeitung ist es, basierend auf *An Introduction to amenable Groups* von Alejandra Garrido, zwei, zur Amenabilität äquivalente, Begriffe bzw. Definitionen anzugeben.

Explizit werden dies die *Følner Bedingung* und die *Følner Folge* aus dem Jahre 1955 sein, dazu Beispiele und abschließend die Beweise zur Äquivalenz untereinander und zur Amenabilität.

Anfangen werden wir zuerst damit, dass wir uns die beiden Definitionen von amenablen Gruppen in Erinnerung rufen.

Definition 1.1. *Eine Gruppe G heißt amenabel falls ein endlich additives, links invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Teilmengen von G existiert.*

Dies ist die Definition, mit der wir voranging arbeiten werden. Jedoch benötigen wir für den Beweis unserer zweiten Hauptaussage auch die Definition über das Mittelfunktional.

Definition 1.2. *Eine Gruppe G ist amenabel, falls es ein invariantes Mittelfunktional gibt.*

2 Folner Definition der amenablen Gruppen

2.1 Definitionen und Hauptaussagen

Jetzt sind wir auch so weit, die beiden Definitionen anzugeben und im Anschluss auch die beiden Äquivalenzaussagen, die wir später beweisen werden.

Definition 2.1 (Følner Bedingung). *Eine diskrete Gruppe G genügt der Følner Bedingung, falls für alle endlichen Teilmengen $A \subseteq G$ und alle $\varepsilon > 0$ eine nicht-leere, endliche Teilmenge $F \subseteq G$ existiert, so dass für alle $a \in A$ gilt*

$$\frac{|aF \Delta F|}{|F|} \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Hierbei ist in der Ungleichung die symmetrische Differenz gemeint, sprich die Vereinigung ohne den Schnitt.

Der zweite Begriffe ist indes auf ähnliche Weise definiert.

Definition 2.2 (Følner Folge). *Für eine diskrete, abzählbare Gruppe G ist eine Følner Folge eine Folge $\{F_n\}$ von nicht-leeren, endlichen Teilmengen von G , so dass für alle $g \in G$ gilt*

$$\frac{|gF_n \Delta F_n|}{|F_n|} \rightarrow 0 \quad (2)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung 2.3. *Für den überabzählbaren Fall nennen wir eine solche Folge Følner Netz.*

Dieser Fall wird im Laufe des Vortrags nicht weiter relevant sein, da die Äquivalenz nur für abzählbare Gruppen gilt.

Kommen wir nun zu unsere ersten Aussage.

Lemma 2.4. *Eine Gruppe genügt der Følner Bedingung genau dann, wenn sie eine Følner Folge besitzt.*

Das folgende Theorem, welches auch die zentrale Aussage dieser Ausarbeitung darstellt, schafft nun den Übergang zu amenablen Gruppen.

Theorem 2.5. *Eine Gruppe genügt der Følner Bedingung genau dann, wenn sie amenabel ist.*

2.2 Beispiele zu den Definitionen

Bevor wir uns an die Beweise der beiden Aussagen heranwagen, ist es sinnvoll, sich die beiden Definitionen anhand von Beispielen klar zu machen. Dabei wird auch versucht, den Bezug zur Amenabilität herzustellen, weshalb das Theorem auch schon angegeben wurde.

Kommen wir zuerst zu den Beispielen für die Følner Bedingung.

Beispiel 2.6. *Jede endliche Gruppe erfüllt die Følner Bedingung.*

Jede endliche Gruppe ist amenabel, wenn man als Maß das normierte Zählmaß nimmt. Nach Theorem 2.5 muss sie damit auch die Følner Bedingung erfüllen.

Dafür nehmen wir $F = G$. Dann gilt

$$\frac{|aF \triangle F|}{|F|} = \frac{|G \triangle G|}{|G|} = \frac{0}{|G|} = 0 \leq \varepsilon$$

für alle $a \in G$ und $\varepsilon > 0$.

Beispiel 2.7. \mathbb{Z} genügt der Følner Bedingung.

Da \mathbb{Z} ebenfalls amenabel ist, was in der Quelle auch bewiesen wird, muss damit nach Theorem 2.5 auch die Følner Bedingung erfüllt sein. Dies ist auch der Fall, wie man sich leicht vor Augen führen kann. Man nehme für eine endliche Menge A eine sehr viel größere Menge F . Für alle $a \in A$ wird dabei die symmetrische Differenz in etwa $2a$ betragen, so dass der Gesamtwert der linken Seite von (1) von der Kardinalität von F abhängt. Je nachdem, welches ε man gewählt hat, wird man dann dementsprechend das F etwas größer oder kleiner wählen.

Diese Idee wird etwas 'mathematischer' im Beispiel zur Følner Folge dargestellt, wo die Idee die Selbe ist.

Beispiel 2.8. \mathbb{F}_2 erfüllt die Følner Bedingung nicht.

2 Følner Definition der amenablen Gruppen

Im Allgemeinen gilt die Aussage, dass Gruppen nicht sowohl amenabel als auch paradox sein können. Da nach Banach-Tarski \mathbb{F}_2 paradox ist, folgt erneut nach Theorem 2.5, dass die Gruppe nicht die Følner Bedingung erfüllen kann.

Man kann sich anhand von Beispielen klar machen, dass die linke Seite von (1) immer nach unten hin beschränkt ist. Nehmen wir beispielsweise den Cayley Graphen $\Gamma(\mathbb{F}_2, A)$, wobei $A = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$ die Menge der Erzeuger darstellt. Wenn wir für F die Menge der Wörter der Länge höchstens 2 nehmen, so ist (1) für alle Elemente aus A durch 1 beschränkt. Nehmen wir für F nur Potenzen von a , so können wir für $a^{\pm 1}$ die Følner Bedingung sogar erfüllen, jedoch dann nicht für $b^{\pm 1}$. Man kann auch allgemeiner zeigen, dass wir kein F finden können, welches für dieses A die Følner Bedingung erfüllt.

Kommen wir nun zu den Beispielen für die Følner Folge.

Beispiel 2.9. \mathbb{Z} besitzt eine Følner Folge.

Wir nehmen dafür $F_n = \{-n, \dots, n\}$, womit für alle $g \in G$ gilt

$$\frac{|\{g - n, \dots, g + n\} \Delta \{-n, \dots, n\}|}{|\{-n, \dots, n\}|} \leq \frac{2g}{2n + 1} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Beispiel 2.10. Alle endlich erzeugten abelschen Gruppen haben eine Følner Folge.

Wir wissen nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen, dass es eine Zerlegung in eine endliche Gruppe und in \mathbb{Z}^n gibt. Jede endliche Gruppe hat eine Følner Folge, indem wir $F_n = G$, für jedes n , nehmen. Für \mathbb{Z}^n können wir die selbe Idee wie für \mathbb{Z} anwenden, nur dass wir hier im Mehrdimensionalen arbeiten müssen. Da damit beide Arten von Gruppen eine Følner Folge besitzen, gilt dies ebenso für die endlich erzeugten abelschen Gruppen.

Beispiel 2.11. Abelsche Gruppen besitzen ein Følner Folge.

Dies ist eine direkte Konsequenz aus dem vorherigen Beispiel. Indem wir über die Følner Bedingung argumentieren und anmerken, dass jede endliche Teilmenge einer abelschen Gruppe eine endlich erzeugte abelsche Gruppe erzeugt, die nach Beispiel 2.10 und Lemma 2.4 die Følner Bedingung erfüllt, muss auch die abelsche Gruppe selbst der Følner Bedingung genügen und somit eine Følner Folge besitzen.

2.3 Beweise der Hauptaussagen

Mit diesem letzten Beispiel haben wir auch einen guten Zeitpunkt erreicht, das verwendete Lemma 2.4 auch zu beweisen.

Beweis von Lemma 2.4. Nehmen wir zuerst an, dass G der Følner Bedingung genüge. Sei $G = \cup_n A_n$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ eine aufsteigende Folge von endlichen Teilmengen

2 Folner Definition der amenablen Gruppen

von G und $\varepsilon_n = 1/n$ für alle n . Nach der Følner Bedingung gibt es nun für alle A_n ein $F_n \subseteq G$, so dass für alle $a \in A_n$ gilt

$$\frac{|aF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \leq \varepsilon_n = \frac{1}{n}.$$

Außerdem gilt, dass es für alle $g \in G$ ein A_n gibt, so dass $g \in A_n$ gilt, da G eben die Vereinigung aller dieser A_n ist. Da die A_n eine aufsteigende Folge bilden, muss auch $g \in A_m$ für alle $m \geq n$ gelten. Damit können wir nun den Grenzwert bilden und haben damit für alle $g \in G$

$$\frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Für die andere Richtung nehmen wir nun an, dass eine Følner Folge existiert, d.h.

$$\frac{|gF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \rightarrow 0,$$

für alle $g \in G$, gilt. Damit existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein F_m , so dass für alle $g \in G$

$$\frac{|gF_m \triangle F_m|}{|F_m|} \leq \varepsilon$$

gilt. Damit ist die Ungleichung auch für alle $g \in A$, mit jeder endlichen Teilmenge $A \subseteq G$, erfüllt. □

Kommen wir nun direkt zum Beweis der Äquivalenz zur Amenabilität.

Beweis von Theorem 2.5. Nehmen wir zuerst an, die Gruppe erfülle die Følner Bedingung.

Für feste $A \subseteq G$ endlich und $\varepsilon > 0$ definieren wir die Menge

$$M_{A,\varepsilon} := \{\mu : \mathcal{P}(G) \rightarrow [0, 1] : \mu \text{ endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß mit } |\mu(B) - \mu(aB)| \leq \varepsilon \text{ für alle } B \subseteq G \text{ und } a \in A\}.$$

Wir wollen zeigen, dass der Schnitt dieser Menge über alle A und ε nicht leer ist, da somit für alle Teilmengen von G gezeigt wurde, dass das Maß links-invariant ist.

Dafür überprüfen wir nun drei Bedingungen:

1. $M_{A,\varepsilon}$ ist abgeschlossen im kompakten $[0, 1]^{\mathcal{P}(G)}$,
2. $M_{A_1,\varepsilon_1} \cap M_{A_2,\varepsilon_2} \supseteq M_{A_1 \cup A_2, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}$,
3. $M_{A,\varepsilon} \neq \emptyset$ für alle $A \subseteq G$ endlich und $\varepsilon > 0$.

2 Folner Definition der amenablen Gruppen

Die Kompaktheit in Punkt 1 folgt aus dem Satz von Tychonoff, da $[0, 1]$ selber kompakt ist. Für die Abgeschlossenheit betrachten wir die jeweiligen Komplemente der Bedingungen in $M_{A,\varepsilon}$: Für feste a, B bedeutet das, dass $|\mu(B) - \mu(aB)| > \varepsilon$ gilt, wir also eine offene Umgebung für μ finden. Genauso für $\mu(G) < 1$ und auch für die endliche Additivität.

Punkt 2 folgt direkt nach Überprüfung der Bedingung. Es gilt für festes $B \subseteq G$

$$|\mu(B) - \mu(aB)| \leq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

für alle $a \in A_1 \cup A_2$ und damit

$$|\mu(B) - \mu(aB)| \leq \varepsilon_i$$

für alle $a \in A_i$.

Um den dritten Punkt zu beweisen, müssen wir uns ein passendes Maß konstruieren. Wir definieren hierfür

$$\mu(B) := \frac{|B \cap F|}{|F|}$$

mit F aus der Følner Bedingung für die jeweiligen A, ε . Es ist leicht zu überprüfen, dass dies ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß auf G ist. Für die letzte Bedingung setzen wir die Definition ein,

$$|\mu(B) - \mu(aB)| = \frac{||B \cap F| - |aB \cap F||}{|F|},$$

stellen fest, dass das Verschieben von beiden Mengen in einem Schnitt die Kardinalität nicht verändert,

$$= \frac{||aB \cap aF| - |aB \cap F||}{|F|}$$

und schätzen nach oben ab, indem wir die symmetrische Differenz von F und aF nehmen, da hier die Kardinalität addiert und nicht, wie vorher, subtrahiert wird

$$\leq \frac{|aB \cap (aF \Delta F)|}{|F|} \leq \frac{|aF \Delta F|}{|F|} \leq \varepsilon.$$

Nach der endlichen Durchschnittseigenschaft existiert nun ein Maß im Schnitt aller $M_{A,\varepsilon}$, welches links-invariant ist, womit die Amenabilität bewiesen wurde.

2 Folner Definition der amenablen Gruppen

Für die Rückrichtung nehmen wir an, G sei amenabel.

Erneut definieren wir uns eine Menge, nämlich

$$\Phi := \{f \in \ell^1(G) : f \geq 0, \text{supp}(f) < \infty, \|f\|_{\ell^1(G)} = 1\},$$

wobei $\ell^1(G)$ die Menge der Funktionen auf G mit $\sum_{g \in G} |f(g)| < \infty$ ist. Wir wollen zeigen, dass für alle $A \subseteq G$ und $\varepsilon \in (0, 1)$ ein $f \in \Phi$ existiert, so dass

$$\|f - {}_a f\|_{\ell^1(G)} \leq \varepsilon$$

für alle $a \in A$ gilt. Dies werden wir später für die Abschätzung in der Følner Bedingung benötigen.

Nehmen wir zuerst das Gegenteil an, also, dass es ein $A \subseteq G$ und $\varepsilon \in (0, 1)$ gibt, so dass es für alle $f \in \Phi$ ein $a \in A$ gibt mit

$$\|f - {}_a f\|_{\ell^1(G)} > \varepsilon. \tag{3}$$

Wir bezeichnen für festes $a \in A$ die Menge mit Φ_a , sprich

$$\Phi_a := \{f - {}_a f : f \in \Phi, \|f - {}_a f\|_{\ell^1(G)} > \varepsilon\}.$$

Offensichtlich ist Φ_a aufgrund der Bedingung (3) offen. Des weiteren ist sie auch konvex, weil Φ konvex ist und sich diese Eigenschaft auf Elemente der Form $f - {}_a f$ überträgt (siehe Bemerkung 2.12 unten).

Damit können wir nun das Hahn-Banach Trennungstheorem auf die konvexe Menge und den Punkt 0 anwenden. Es existiert also ein $\beta \in \ell^1(G)^*$ und $t \in \mathbb{R}$, so dass

$$\beta(f - {}_a f) \geq t$$

für alle $f - {}_a f \in \Phi_a$ gilt und weiter muss $t > 0$ gelten, da die Norm der Elemente von Φ_a größer als 0 ist und wir mit 0 trennen.

Da $\ell^1(G)^* \cong \ell^\infty(G)$, können wir auch ein $m \in \ell^\infty(G)$ finden mit

$$\langle f - {}_a f, m \rangle \geq t > 0$$

für alle $f - {}_a f \in \Phi_a$, wobei wir beim Übergang zu $\ell^\infty(G)$, der Menge der beschränkten Funktionen, zum Skalarprodukt über den Elementen von G übergehen müssen.

Wähle $f = \delta_y$ für ein $y \in G$, wobei leicht zu sehen ist, dass $\delta_y \in \Phi$ gilt. Damit gilt

$$\sum_{x \in G} (\delta_y(x) - {}_a \delta_y(x)) m(x) = m(y) - m(a^{-1}y) \geq t > 0 \tag{4}$$

für alle $y \in G$. Da G nach Annahme amenabel ist, folgt nach Definition 1.2, dass es ein links-invariantes Mittelfunktional $M : \ell^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt. Angewandt auf (4) haben wir damit

$$M(m - {}_{a^{-1}} m) \geq M(t) = t \cdot M(1) = t > 0,$$

2 Folner Definition der amenablen Gruppen

was ein Widerspruch zur links-Invarianz darstellt.

Also gibt es für alle $A \subseteq G, \tilde{\varepsilon} > 0$ ein $f \in \Phi$ mit

$$\|f - {}_a f\|_{\ell^1(G)} \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{|A|} \quad (5)$$

für alle $a \in A$, wobei wir ausnutzen, dass die vorherige Aussage für $\varepsilon \in (0, 1)$ gezeigt wurde.

Da f endlichen Träger besitzt, finden wir eine *layer-cake Darstellung*, also

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \cdot 1_{F_i},$$

$${}_a f = \sum_{i=1}^n c_i \cdot 1_{{}_a F_i}$$

mit $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n$ und $c_i > 0, F_i \neq \emptyset$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Für $g \in ({}_a F_k \triangle F_k), 1 \leq k \leq n$, gilt:

$$1. \quad g \in F_k, g \notin {}_a F_k \implies f(g) \geq \sum_{i=1}^k c_i, \quad {}_a f(g) \leq \sum_{i=1}^{k-1} c_i \implies |f(g) - {}_a f(g)| \geq c_k.$$

$$2. \quad g \notin F_k, g \in {}_a F_k \implies f(g) \leq \sum_{i=1}^{k-1} c_i, \quad {}_a f(g) \geq \sum_{i=1}^k c_i \implies |f(g) - {}_a f(g)| \geq c_k.$$

Summieren über alle $g \in ({}_a F_k \triangle F_k)$ liefert, zusammen mit (5),

$$\sum_{i=1}^n c_i |{}_a F_i \triangle F_i| \leq \|f - {}_a f\|_{\ell^1(G)} \leq \frac{\tilde{\varepsilon}}{|A|} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{|A|} \cdot \sum_{i=1}^n c_i |F_i|,$$

wobei der letzte Term aus der Eigenschaft $\|f\|_{\ell^1(G)} = 1$ folgt. Durch Summieren über alle $a \in A$ haben wir

$$\sum_{i=1}^n \sum_{a \in A} c_i |{}_a F_i \triangle F_i| \leq \tilde{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^n c_i |F_i|.$$

Nach dem Schubfachprinzip existiert ein i , welches die Ungleichung erfüllen muss, also

$$\sum_{a \in A} c_i |{}_a F_i \triangle F_i| \leq \tilde{\varepsilon} \cdot c_i |F_i|$$

und Kürzen des c_i liefert die Følner Bedingung für alle $a \in A$

$$|{}_a F_i \triangle F_i| \leq \tilde{\varepsilon} |F_i|.$$

□

Bemerkung 2.12. *Der Beweis hängt stark von der Konvexität von Φ_a ab, um das Hahn-Banach Trennungstheorem benutzen zu können. Jedoch wird weder aus der Quelle, noch aus anderer Literatur klar, wieso sich die Konvexität von Φ auf Φ_a überträgt, so dass sich an dieser Stelle im Beweis ein Problem ergibt.*

Bemerkung 2.13. *Man kann die Hinrichtung auch über Verwendung der Følner Folge und sogenannten ultralimits und ultrafilter beweisen.*