Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe: 21.12. bis 16:00 Uhr
Besprechung: 23.12.

Einführung in die Gruppentheorie
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei n eine natürliche Zahl. Wir betrachten die Gruppe **5+5P.**

$$G = \begin{pmatrix} 1 & n\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $[G, G]$.

b) Die Gruppe $G/[G, G]$ ist abelsch. Finden Sie $t, k_1, \dots, k_s$, so dass folgendes gilt:

$$G/[G, G] \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{t} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_s}.$$

Aufgabe 2. Sei $M_\omega(K)$ die Menge von unendlichen Matrizen über dem Körper K, deren Zeilen und Spalten mit allen natürlichen Zahlen numeriert sind. Sei $UT_\omega(K)$ die Menge aller Matrizen aus $M_\omega(K)$ mit Einsen auf der Hauptdiagonalen, mit 0 unter der Hauptdiagonalen und mit nur endlich vielen nichtnullschen Zahlen über der Hauptdiagonalen. Diese Menge $UT_\omega(K)$ ist eine Gruppe bezüglich der natürlichen Multiplikation. **6+5P.**

Sei p eine Primzahl.

a) Beweisen Sie, dass das Zentrum von $UT_\omega(\mathbb{Z}_p)$ nur die Einheitsmatrix enthält. Leiten Sie daras, dass $UT_\omega(\mathbb{Z}_p)$ keine nilpotente Gruppe ist.

b) Beweisen Sie, dass $UT_\omega(\mathbb{Z}_p)$ eine p-Gruppe ist.

Aufgabe 3. **4+2+4P.**

a) Beweisen Sie, dass alle nilpotenten Untergruppen von A_5 zyklisch oder isomorph zu $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sind.

b) Finden Sie die Ordnungen von zyklischen Untergruppen in A_5.

c) Finden Sie eine zyklische Untergruppe in A_{10}, die maximal mögliche Ordnung hat.

Hinweis zu a). Benutzen Sie den Satz 17.8 von Burnside-Wielandt.

Aufgabe 4. **3+3+3P.**

a) Seien A, B Gruppen und $\overline{A}$ eine Faktorgruppe von A. Beweisen Sie, dass ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : A \wr B \to \overline{A} \wr B$ existiert.

b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}_2$ nicht nilpotent ist.

c) Beweisen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$ nilpotent ist.