Prof. Dr. Oleg Bogopolski | Abgabe: 14.12. bis 16:00 Uhr
Besprechung: 16.12.

Einführung in die Gruppentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei p eine ungerade Primzahl. Wir betrachen die Heisenberg-Gruppe über dem Körper $\mathbb{Z}_p$: **4+7P.**

$$H_3(p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Beweisen Sie, dass die Gruppen $H_3(p)$ und $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ folgenden Eigenschaften haben:

(a) Sie sind nicht isomorph.

(b) Sie haben die gleiche Anzahl von Elementen der gleichen Ordnungen.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass jede 2-Sylow Untergruppe von S_4 transitiv, aber nicht 2-transitiv auf $\{1, 2, 3, 4\}$ operiert. **6P.**

Aufgabe 3. Sei $n \geqslant 3$. Eine Untergruppe $G \leqslant S_n$ operiert auf $\{1, 2, \dots, n\}$ $(n-2)$-transitiv. **7+3P.**

(a) Beweisen Sie, dass $|G| = n!/2$ oder $|G| = n!$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass G gleich A_n oder S_n ist.

Hinweis. Lesen Sie das ganze Kurzskript.

Aufgabe 4. Wir betrachen die Heisenberg-Gruppe **5+8P.**

$$H_4 = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & x & z \\ 0 & 1 & b & y \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c, x, y, z \in \mathbb{Z} \}$$

(a) Beweisen Sie, dass H_4 nilpotent des Grades 3 ist.

(b) Berechnen Sie die ihre Hyperzentren $\Gamma_i(H_4)$, $i = 0, 1, 2, 3$.