Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe: 23.11. bis 16:00 Uhr
Besprechung: 25.11.

Einführung in die Gruppentheorie
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. **9P.**

Sei n eine natürliche Zahl und K ein Körper. Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ definieren wir eine Matrix $A_\sigma \in \mathrm{GL}_n(K)$ nach der Regel

$$(A_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \sigma(j) = i \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \\ & \sigma \mapsto A_\sigma, \end{aligned}$$

eine Einbettung ist.

Aufgabe 2. Die Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$ ist die multiplikative Gruppe aller invertierbaren Elemente des Ringes $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$. Sei G die Untergruppe von $\mathbb{Z}_{15}^*$, die von 2 erzeugt ist. **4×3P.**

a) Schreiben Sie alle Elemente von G auf.

b) Die Gruppe G operiert auf der Menge $\mathbb{Z}_{15}^*$ durch Multiplikation. Finden Sie alle Orbits.

c) Die Gruppe G operiert auf der Menge $\mathbb{Z}_{15}$ durch Multiplikation. Finden Sie alle Orbits.

d) Berechnen Sie die Anzahl von Orbits aus c) mit Hilfe der Burnside-Formel.

Hinweis. Siehe Beispiel 8.5.

Aufgabe 3. Man hat unbeschränkte Mengen von roten und gelben Perlen. Wie viele Halsketten können aus 8 Perlen gemacht werden? **10P.**

Hinweis. Die Halsketten werden in $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Daher sind zwei Halsketten äquivalent, wenn sich die zweite Kette aus der ersten mit Hilfe von Spiegelungen und Rotationen transformiern läßt. Wenden Sie den Burnside-Satz an.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Rotationsgruppe des Würfels zu S_4 isomorph ist. **9P.**

Hinweis. Es gibt 4 lange Strecken in dem Würfel.