Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe: 2.11. bis 16:00 Uhr
Besprechung: 4.11.

Einführung in die Gruppentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei G eine nichttriviale Gruppe, in der die Ordnungen aller nichttrivialen Elemente gleich 2 sind. **5+5P.**

(a) Beweisen Sie, dass G kommutativ ist.

(b) Beweisen Sie: Ist diese G endlich erzeugt, dann gilt $G \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2}_{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis. Zu (b): Benutzen Sie (a) und einen Satz aus dem Skript.

Aufgabe 2. **5+5P.**

(a) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 4 kommutativ ist.

(b) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 4 entweder $\mathbb{Z}_4$ oder $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ isomorph ist.

Hinweis.
Zu (a): Aus dem Satz von Lagrange folgt (warum?), dass mögliche Ordnungen nichttrivialer Elemente von G gleich 2 oder 4 sind. Danach benutzen Sie Aufgabe 1.
Zu (b): Benutzen Sie (a) und einen Satz aus dem Skript.

Aufgabe 3. **8+2P.**
Sei F eine freie abelsche Gruppe mit der Basis f_1, f_2, f_3 und sei A die Untergruppe von F, die von

$$\begin{aligned} a_1 &= 2f_1 + f_2 + f_3, \\ a_2 &= 4f_1 + 4f_2 + 6f_3, \\ a_3 &= \phantom{2f_1 + {}} f_2 + 2f_3, \end{aligned}$$

erzeugt ist.

(a) Finden Sie eine Basis f_1', f_2', f_3' von F und eine Basis $a_1', \dots, a_k'$ von A, so dass $a_i' = m_i f_i'$ mit $m_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, k$ ist.

(b) Zerlegen Sie F/A in die direkte Summe von endlichen und unendlichen zyklischen Gruppen.

Fortsetzung Seite 2.

Definition. Sei G eine Gruppe. Wir sagen, dass G ein *inneres direktes Produkt* ihrer Untergruppen A und B ist, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$,
(2) $A \cap B = \{e\}$,
(3) $G = AB$.

Aufgabe 4. Sei $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$. **5+5P.**

(a) Finden Sie alle Untergruppen von G, die isomorph zu $\mathbb{Z}_4$ sind.

(b) Es ist klar, dass G ein inneres direktes Produkt von $A := \{(i, 0) \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$ und $B := \{(0, i) \mid i \in \mathbb{Z}_4\}$ ist. Finden Sie zwei Untergruppen A_1 und B_1 von G, so dass $A_1 \neq A$, $B_1 \neq B$ ist und G ein inneres direktes Produkt von A_1 und B_1 ist.