Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Abgabe: 25.01. bis 16:00 Uhr
Besprechung: 27.01.

Einführung in die Gruppentheorie
Übungsblatt 12

Aufgabe 1. **12P.**

Beweisen Sie, dass die Heisenberg-Gruppe über dem Körper $\mathbb{Z}_p$,

$$H_3(p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\},$$

die folgende Präsentation hat:

$$\langle x, y, z \mid x^p = y^p = z^p = 1,\ [x, y] = z,\ [x, z] = [y, z] = 1 \rangle.$$

Hinweis. Manchmal wird in einer Präsentation die Gleichung $u = v$ statt des Wortes uv^{-1} geschrieben.

Aufgabe 2. **5+5P.**

Sei $k \geqslant 2$. Auf der Menge $\mathbb{N}^k$ definieren wir eine totale Ordnung $\succcurlyeq$ wie folgt: Seien $U = (n_1, \dots, n_k)$ und $U' = (n'_1, \dots, n'_k)$ zwei k-Tupel aus $\mathbb{N}^k$. Wir schreiben $U \succcurlyeq U'$, wenn $U = U'$ ist oder ein $i \in \{0, \dots, k-1\}$ existiert, so dass $u_1 = u'_1, \dots, u_i = u'_i$ und $u_{i+1} > u'_{i+1}$ gilt. Wir schreiben $U \succ U'$, wenn $U \succcurlyeq U'$ und $U \neq U'$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass jede sinkende Kette $U^{(1)} \succ U^{(2)} \succ U^{(3)} \succ \dots$ von k-Tupeln endlich ist.

(b) Sei $U = (2, 1, 1)$. Für jeden $n \geqslant 1$ konstruieren Sie eine sinkende Kette $U^{(1)} \succ U^{(2)} \succ U^{(3)} \succ \cdots \succ U^{(n)}$ der Länge n, so dass $U^{(1)} = U$ ist.

Hinweis. Diese Aufgabe ist relevant für den Beweis des Satzes 20.5 meines Kurzskripts.

Aufgabe 3. **6+8P.**

(a) Zeigen Sie, dass es genau 3 Untergruppen von Index 2 in $F(a, b)$ gibt.

(b) Finden Sie Basen aller drei Untergruppen von Index 2 in $F(a, b)$.

Hinweis. (a) Beschreiben Sie alle Epimorphismen $F(a, b) \to \mathbb{Z}_2$.

Aufgabe 4. **11P.**

Mit Hilfe der Tietze–Transformationen und ihrer Inversen transformieren Sie die Präsentation $\langle x, y \mid x^{-5}y^2,\ x^6y^{-3} \rangle$ zur Präsentation $\langle x \mid x^3 \rangle$.

Hinweis. Tietze–Transformationen sind auf Seite 28 meines Kurzskripts definiert. Auch sind sie in meinem Buch erklärt (Seiten 60-63).