Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 18.06. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 9

Zur Erinnerung: Sei X der gewurzelte unendliche 3-Baum (aus der Wurzel des Baumes wachsen 3 Äste). Mit X_v haben wir den Teilbaum bezeichnet, der aus dem Eckpunkt v wächst. So wachsen die Bäume X_1, X_2 und X_3 aus den Eckpunkten 1, 2 und 3 des ersten Niveaus. Wir haben $X_1 \cong X_2 \cong X_3 \cong X$.

Für einen Automorphismus β und einen Eckpunkt v von X haben wir den Transfer von β auf X_v mit β_v bezeichnet. Der Automorphismus τ permutiert X_1, X_2 und X_3. Der Automorphismus α wurde definiert durch $\alpha = \tau_1 \tau_2^{-1} \alpha_3$.

Die 3-Gruppe von Gupta-Sidki ist $\langle \tau, \alpha \rangle$. Weitere Informationen über diese Gruppe können Sie in folgendem Buch finden (s. Seiten 22-32):
G. Baumslag "Topics in Combinatorial Group Theory", Birkhauser, Berlin, 1993.

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ordnung des Elements $\alpha\tau^{-1}$ in der Gruppe von Gupta-Sidki. Nach unserer Konvention werden die Automorphismen von links angewandt, d.h. für jeden Eckpunkt v des Baumes X ist das Bild von v unter $\alpha\tau^{-1}$ gleich $\tau^{-1}(\alpha(v))$. **10P.**

Aufgabe 2. Überprüfen Sie die Formel **10P.**

$$\tau^{-1}\alpha\tau = \alpha_1 \tau_2 \tau_3^{-1},$$

$$\tau^{-2}\alpha\tau^2 = \tau_1^{-1} \alpha_2 \tau_3.$$

Aufgabe 3. Nach Satz von Levi und van der Warden ist die maximale Ordnung der endlichen 2-erzeugten Gruppen mit Periode 3 gleich 27. **5+15P.**

(a) Finden Sie eine Matrixgruppe mit dieser Eigenschaft.

(b) Das Kranzprodukt $G = \mathbb{Z}_3 \wr \mathbb{Z}_3$ hat die Ordnung 81 und ist 2-erzeugt. Nach dem Satz von Levi und van der Warden ist G keine Gruppe mit Period 3. Finden Sie in G ein Element der Ordnung 9.

Hinweis. Die Definition eines Kranzproduktes finden Sie im Kurzskript.