Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 11.06. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz 28.3 aus dem Kurzskript. **10P.**

Hinweis. Ein kurzer Beweis steht in meinem Buch. Verstehen Sie ihn und schreiben Sie ihn ausführlich auf.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe mit der Präsentation **10P.**

$$\langle x, y, z \mid x^2 = y^2 = z^2 \rangle,$$

sei $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ und sei $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2$ der Epimorphismus mit $\varphi(x) = \varphi(y) = \varphi(z) = 1$. Finden Sie eine einfache Präsentation für $\ker(\varphi)$.

Aufgabe 3. Sei F eine freie Gruppe mit einem endlichen Rang und sei H eine Untergruppe von index k in F. Beweisen Sie die Schreier-Formel **10P.**

$$k = \frac{\mathrm{rk}(H) - 1}{\mathrm{rk}(F) - 1}.$$

Hinweis. Benutzen Sie die graphische Darstellung von H, die Sie schon kennen. Sei Γ der Graph, der H darstellt. Benutzen Sie den Fakt, dass die $\mathrm{rk}(H)$ gleich der Anzahl von Kanten außerhalb des maximalen Baums in Γ ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}$ in eine Gruppe G eingebettet werden kann, die nur 2 Konjugationsklassen von Elementen hat. **10P.**

Hinweis. Benutzen Sie HNN-Erweiterungen und unendliche Vereinigungen.