Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 28.05. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Wir haben bewiesen, dass **6+6P.**

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle T \,|\, T^4 = 1\rangle \underset{T^2=R^3}{*} \langle R \,|\, R^6\rangle$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

(a) Schreiben Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

als Produkte von $T^{\pm 1}$ und $R^{\pm 1}$ auf.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von Normalformen in dem amalgamierten Produkt, dass $\langle A, B\rangle$ eine freie Gruppe mit der Basis A, B ist.

Aufgabe 2. Sei $F = F(a,b)$ die freie Gruppe mit der Basis a, b und sei $g = a^{-1}b^2ab^{-2}$. **6+4P.**

(a) Finden Sie ein Erzeugersystem einer Untergruppe H von $F(a,b)$ mit Index 6, für die $g \notin H$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass eine normale Untergruppe N von Index 6 in F existiert, für die $g \notin N$ gilt.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass die Baumslag-Solitar Gruppe $\mathrm{BS}(1,n)$ residuell endlich ist. **2P.**

Hinweis. Verweisen Sie auf einen Satz.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und H eine normale Untergruppe von G mit **4+12P.**

$$G/H \cong \mathbb{Z}.$$

Beweisen Sie:

(a) Es gibt nur zwei nichtisomorphe Gruppen G mit $H \cong \mathbb{Z}$. Diese haben folgende Präsentationen:

$$\langle a, b \,|\, a^{-1}ba = b\rangle, \qquad \langle a, b \,|\, a^{-1}ba = b^{-1}\rangle.$$

(b) Es gibt unendlich viele paarweise nichtisomorphe Gruppen G mit $H \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Hinweis. Für 4 nichtisomorphe Gruppen in Aufgabe 4 (b) werden 4 Punkte gegeben.