Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 14.05. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Wir betrachten die Baumslag-Solitar Gruppe **3+3+6+6P.**

$$\mathrm{BS}(1, n) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^n \rangle.$$

(1) Beweisen Sie, dass $[a^iba^{-i}, a^jba^{-j}] = 1$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ ist.

(2) Beweisen Sie, dass

$$a^iba^{-i} = (a^{i+k}ba^{-(i+k)})^{n^k}$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(3) Leiten Sie aus (1) und (2) ab, dass jedes Element $g \in \mathrm{BS}(1, n)$ in der Form

$$g = a^{-\ell}b^ta^\ell \cdot a^s$$

geschrieben werden kann.

(4) Sei G die Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, die von folgenden zwei Matrizen erzeugt ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie mit Hilfe von (3), dass für $n \geqslant 2$

$$\varphi : \mathrm{BS}(1, n) \to G, \quad a \mapsto A, b \mapsto B,$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2. Folgende Präsentationen sind bekannt: **4+4+4P.**

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2 &= \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1 \rangle, \\ \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 &= \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1, [x, y] = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Sei $\varphi : \mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ der kanonische Epimorphismus ($a \mapsto x$, $b \mapsto y$).

(1) Beweisen Sie, dass die Untergruppe $\langle aba^{-1}b^{-1},\ a^2ba^{-2}b^{-1} \rangle$ normal in $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2$ ist.

(2) Beweisen Sie:

$$\mathrm{Ker}\varphi = \langle aba^{-1}b^{-1},\ a^2ba^{-2}b^{-1} \rangle.$$

(3) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ker}\varphi$ eine freie Gruppe mit der Basis $\{aba^{-1}b^{-1},\ a^2ba^{-2}b^{-1}\}$ ist.

Aufgabe 3. Die *Heisenberg-Gruppe* ist die multiplikative Gruppe der Matrizen der Form **10P.**

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit x, y, z aus $\mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass H die folgende Präsentation hat:

$$\langle X, Y, Z \mid [X, Y] = Z,\ [X, Z] = 1,\ [Y, Z] = 1 \rangle,$$

wobei $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ bezeichnet.