Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Matteo Vannacci

Abgabe: 25.06. bis 10:20 Uhr

Kombinatorische Gruppentheorie
Übungsblatt 10

Satz. (Zelmanov) Für je zwei natürliche Zahlen n, m, existiert eine Zahl $f(n, m)$, so dass jede endliche n-erzeugte Gruppe G mit Periode m (d.h. $g^m = 1$ für jedes $g \in G$) die Ordnung höchstens $f(n, m)$ hat.

Aufgabe 1. Automaten a und b aus der Vorlesung[1] operieren auf der Menge von endlichen Tupel, die nur 1 und 2 enthalten. **5+5P.**

(a) Zeigen Sie, dass der Automat a die Ordnung 2 hat und der Automat b die Ordnung 4 hat. Somit sind a und b invertierbar und wir können die Gruppe $\langle a, b\rangle$ definieren.

(b) Berechnen Sie die Ordnung von ab.

Aufgabe 2. Finden Sie ein Element der Ordnung 27 in der Gruppe von Gupta-Sidki. **10P.**

Aufgabe 3. Sei X der Baum, der für die Definition der Gupta-Sidki-Gruppe benutzt wurde. **10+10P.**

(a) Beweisen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{Aut}(X)$ residuell endlich ist. Leiten Sie daraus ab, dass selbst die Gupta-Sidki-Gruppe residuell endlich ist.

(b) Leiten Sie aus Zelmanov-Satz ab, dass jede unendliche, endlich erzeugte, residuell endliche p-Gruppe Elemente beliebig größer Ordnung hat.

[1] Diese Automaten sind auch im folgenden Buch definiert: Kargapolov, Merzlyakov, *Fundamentals of group theory.*