Lösungsvorschlag für die Erste Klausur

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+3n^2+1}{n^2}-\dfrac{n^5+n^3}{n^3+1}\right)$. [3P.]

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2^x-5^x+3^x}$. [3P.]

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$. [4P.]

Lösung.

(a) Es gilt

$$\frac{n^4+3n^2+1}{n^2}-\frac{n^5+n^3}{n^3+1}=\frac{2n^5+n^4+n^3+3n^2+1}{n^5+n^2}=\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^5}}{1+\frac{1}{n^3}}.$$

Zusammen mit den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4+3n^2+1}{n^2}-\frac{n^5+n^3}{n^3+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^5}}{1+\frac{1}{n^3}}=2.$$

(b) Da $\lim_{x\to\infty}1/5^x=0$ und $\lim_{x\to\infty}1/((2/5)^x-1+(3/5)^x)=-1$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x-5^x+3^x}&=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{5^x}\cdot\frac{1}{(2/5)^x-1+(3/5)^x}\right)\\&=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{5^x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2/5)^x-1+(3/5)^x}\right)\\&=0\cdot(-1)\\&=0.\end{aligned}$$

(c) Mit Hilfe der ersten Regel von L'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2x}{\sin x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\frac{2}{\cos x}=2.$$

Aufgabe 2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Startwert $x_1 \in \mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := x_n - x_n^2. \tag{2.1}$$

(a) Beweisen Sie, dass diese Folge monoton fallend ist. [1P.]

(b) Sei $x_1 \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. [4P.]

(c) Beweisen Sie, dass diese Folge divergent für alle $x_1 \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ist. [5P.]

Lösung. Zunächst sei bemerkt, dass wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und x der Grenzwert ist, so folgt aus (2.1), dass $x = x - x^2$, d.h. $x = 0$. Also

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0. \tag{2.2}$$

(a) Es gilt $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 \leq 0$, also ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

(b) Sei $x_1 \in [0,1]$. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt

$$x_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Als nächstes zeigen wir per Induktion, dass $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 1$ ist die Behauptung klar ($x_1 \in [0,1]$). Sei nun $x_n \geq 0$. Dann gilt

$$x_{n+1} = x_n(1 - x_n) \geq 0$$

nach (2.3) und Induktionsvoraussetzung. Also ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent. Mit (2.2) erhalten wir dann $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

(c) Sei $x_1 \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$. Um zu zeigen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, machen wir folgende Fallunterscheidung:

- <u>1.Fall</u>: $x_1 < 0$.
  Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, folgt $x_n \leq x_1 < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also divergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, da der einzig mögliche Grenzwert $x = 0$ (siehe (2.2)) nicht der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein kann.
- <u>2.Fall</u>: $x_1 > 1$.
  Dann gilt $x_2 = x_1 - x_1^2 < 0$. Nach dem ersten Fall divergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Also divergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $x_1 \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$.

Bemerkung. Wie gerade gesehen, ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $0 \leq x_1 \leq 1$ beschränkt. In den Fallen $x_1 < 0$ und $x_1 > 1$ ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach unten beschränkt. Andernfalls wäre die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen der Monotonie konvergent, was zu einem Widerspruch zu Aufgabenteil (c) führt.

Aufgabe 3. Finden Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen f:

(a) $f(x) = \sin(x)\cos(2x+1)$ [3P.]

(b) $f(x) = \dfrac{5x}{2x^2+3x-2}$ [4P.]

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\cos(\log x)$ [3P.]

Lösung.

(a) Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x)\cos(2x+1) - 2\int \cos(x)\sin(2x+1)\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(x)\cos(2x+1) - 2\left(\sin(x)\sin(2x+1) - 2\int \sin(x)\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -\cos(x)\cos(2x+1) - 2\sin(x)\sin(2x+1) + 4\int \sin(x)\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(-3)\int \sin(x)\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\cos(2x+1) - 2\sin(x)\sin(2x+1)$$

und wir erhalten

$$\int \sin(x)\cos(2x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cos(x)\cos(2x+1) + \frac{2}{3}\sin(x)\sin(2x+1).$$

(b) Es gilt

$$\frac{5x}{2x^2+3x-2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{x}{x^2+(3/2)x-1}. \tag{3.1}$$

Ferner gilt

$$x^2+(3/2)x-1 = (x-(1/2))(x+2).$$

Mittels Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{x}{x^2+(3/2)x-1} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-(1/2)}.$$

Zusammen mit (3.1) folgt

$$\frac{5x}{2x^2+3x-2} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-(1/2)}.$$

Nun wenden wir Beispiel 11.30(b) an und erhalten

$$\int \frac{5x}{2x^2+3x-2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-(1/2)}\,\mathrm{d}x = 2\log|x+2| + \frac{1}{2}\log|x-(1/2)|.$$

(c) Wir setzen $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \log x$. Dann gilt $\varphi'(x) = 1/x$. Eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$, ist gegeben durch $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$. Zusammen mit der Substitutionsregel für unbestimmte Integrale erhalten wir

$$\int \frac{\cos(\log x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) = \sin(\log x).$$

Aufgabe 4.

(a) Finden Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(nz)^n$. [3P.]

(b) Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 2^n}\cdot z^{3n}$ konvergiert. [4P.]

(c) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n - \frac{1}{n}\right)$ konvergiert. [6P.]

Hinweis. Untersuchen Sie gegebenenfalls den Rand des Konvergenzkreises gesondert.

Lösung.

(a) Wir betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nz)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \limsup_{n\to\infty} n = \infty.$$

Nach Satz 12.24 von Hadamard erhalten wir für den Konvergenzradius r, dass $r = 0$ ist.

(b) <u>Beh</u>. Die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 2^n}\cdot z^{3n}. \tag{4.1}$$

konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \sqrt[3]{2}$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \sqrt[3]{2}$.

Beweis. Wir setzen $w = z^3$ und betrachten zunächst die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3 2^n}\cdot w^{n}. \tag{4.2}$$

Setzen wir $c_n = 1/(n^3 2^n)$, so folgt $c_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 2^{n+1}}{n^3 2^n} = 2.$$

Nach Satz 12.18 besitzt die Potenzreihe (4.2) den Konvergenzradius $r_w = 2$, d.h. die Potenzreihe (4.2) konvergiert für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 2$ und divergiert für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 2$. Daraus folgt, dass die Potenzreihe (4.1) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \sqrt[3]{2}$ konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \sqrt[3]{2}$ divergiert. Bleibt der Fall $|z| = \sqrt[3]{2}$ zu betrachten. Für $|z| = \sqrt[3]{2}$ gilt

$$\left|\frac{1}{n^3 2^n}\cdot z^{3n}\right| = \frac{1}{n^3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^3$ nach Beispiel 5.14 konvergiert, folgt nach dem Majorantenkriterium, dass die Potenzreihe (4.1) auch für $|z| = \sqrt[3]{2}$ konvergiert. Es folgt die Behauptung. □

(c) <u>Beh</u>. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n - \frac{1}{n}\right)$$

konvergiert für kein $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir unterscheiden die folgenden beiden Fälle:

- 1.Fall: $|x| \geq 1$.
  Dann gilt
  $$\left| x^n - \frac{1}{n} \right| \geq |x|^n - \frac{1}{n} \geq 1^n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
  für alle $n \geq 2$, d.h $(x^n - 1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge. Nach Satz 5.2 divergiert die Reihe.
- 2.Fall: $0 \leq |x| < 1$.
  Angenommen die Reihe konvergiert. Da $|x| < 1$ ist, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Dann konvergiert auch die Reihe
  $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n - \left(x^n - \frac{1}{n} \right) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$
  was im Widerspruch zu Beispiel 5.5 steht.

Es folgt die Behauptung. $\square$

Aufgabe 5. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = 3x - 4 - 2\log|x|.$$

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen und alle maximalen Intervalle, auf denen f strikt monoton wachsend bzw. strikt monoton fallend ist. [3P.]

(b) Geben Sie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ an. Eine Begründung ist nicht erforderlich. [2P.]

(c) Beweisen Sie, dass f genau drei Nullstellen hat. [3P.]

(d) Finden Sie alle maximalen Intervalle, auf denen $f(x)$ konvex bzw. konkav ist. [3P.]

Lösung.

(a) Offenbar ist f für $x \neq 0$ differenzierbar. Um die Ableitung f' zu bestimmen, unterscheiden wir zwei Fälle. Für $x > 0$ erhalten wir

$$f'(x) = (3x - 4 - 2\log x)' = 3 - \frac{2}{x}. \tag{5.1}$$

Für $x < 0$ gilt

$$f'(x) = (3x - 4 - 2\log(-x))' = 3 - \frac{2}{-x} \cdot (-1) = 3 - \frac{2}{x}.$$

Zusammen mit (5.1) erhalten wir also, dass $f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{x}. \tag{5.2}$$

Daraus folgt

$$x \text{ ist kritische Stelle von } f \;\Leftrightarrow\; f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3 - \frac{2}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{2}{3}.$$

Damit ist $x = 2/3$ die einzige kritische Stelle von f.

Nach (5.2) gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (-\infty, 0)$. Nach nach Satz 10.8 ist f im Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton wachsend. Betrachten wir nun das Intervall $(0, \infty)$. Mit Hilfe von (5.2) erhalten wir, dass $f'(x) > 0$ für alle $x > 2/3$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in (0, 2/3)$. Nach Satz 10.8 ist f im Intervall $[2/3, \infty)$ streng monoton steigend und im Intervall $x \in (0, 2/3]$ streng monoton fallend.

(b) Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\nearrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

(c) Wir starten mit dem Intervall $(-\infty, 0)$. Nach (b) gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \infty$. Da die Funktion f auf $(-\infty, 0)$ stetig und, nach (a), streng monoton wachsend ist, besitzt f im Intervall $(-\infty, 0)$ genau eine Nullstelle.

Schließlich studieren wir das Intervall $(0, \infty)$. Da $e > 3/2$ ist, folgt $1 - \log(3/2) > 0$ und somit

$$f(2/3) = -2(1 - \log(3/2)) < 0. \tag{5.3}$$

Da f stetig und, nach (a), streng monoton fallend auf $(0, 2/3)$ ist, folgt zusammen mit (5.3) und $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$ (siehe (b)), dass f im Intervall $(0, 2/3)$ genau eine Nullstelle besitzt. Ferner ist f stetig und, nach (a), streng monoton wachsend im Intervall $(2/3, \infty)$. Zusammen mit (5.3) und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (siehe (b)), erhalten wir, dass f in $(2/3, \infty)$ genau eine Nullstelle besitzt.

(d) Für $x \neq 0$ gilt nach (5.2), dass

$$f''(x) = \frac{2}{x^2} > 0.$$

Nach Satz 10.14 ist f auf $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ konvex und nirgends konkav.

Aufgabe 6. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere man $a_n := e + 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Es ist bekannt, dass $a_n > 1$ gilt. Ferner definiere man

$$f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (a_n)^x \cos x.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist. [3P.]

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} (a_n)^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

[3P.]

Lösung.

(a) Wir zeigen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Grenzfunktion $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$, konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty}((a_n)^{\pi/2} - 1) = 1^{\pi/2} - 1 = 0$ ist (die Funktion $x \mapsto x^{\pi/2}$ ist stetig und $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ nach Satz 9.14), existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|(a_n)^{\pi/2} - 1| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N. \tag{6.1}$$

Da $a_n > 1$ ist, gilt

$$|(a_n)^x - 1| \leq |(a_n)^{\pi/2} - 1| \overset{(6.1)}{<} \varepsilon \tag{6.2}$$

für alle $x \in [0, \pi/2]$ und alle $n \geq N$. Somit folgt

$$|f_n(x) - \cos x| = |(a_n)^x - 1| \cdot |\cos x| \leq |(a_n)^x - 1| \overset{(6.2)}{\leq} \varepsilon$$

für alle $x \in [0, \pi/2]$ und alle $n \geq N$. Nach Definition 12.2 konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$.

(b) Da die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach (a) gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos x$, konvergiert, erhalten wir mit Satz 12.5, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} (a_n)^x \cos x \, \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \cos x \, \mathrm{d}x = 1.$$