Lösungsvorschlag für Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $q \in (0,1)$.
Beh. Es gilt
$$q^2 < q < \sqrt{q} < \frac{1}{q} < \frac{1}{q^2}.$$

Beweis. Sei $q \in (0,1)$, d.h. $0 < q < 1$.

(i) Setzen wir $x = q$, $y = 1$ und $z = q$ in Satz 2.4.(5) ein, so erhalten wir
$$q^2 < q.$$

(ii) Nach Satz 2.14 ist $\sqrt{q} > 0$. Angenommen, es ist $\sqrt{q} \geq 1$. Dann gilt nach Satz 2.4.(6), dass $q = (\sqrt{q})^2 \geq 1^2 = 1$, Widerspruch. Also ist
$$\sqrt{q} < 1. \tag{1.1}$$
Setzen wir nun $x = \sqrt{q}$, $y = 1$ und $z = \sqrt{q}$ in Satz 2.4.(5) ein, so folgt
$$q < \sqrt{q}.$$

(iii) Angenommen, es ist $1/q < 1$. Setzen wir $x = 1/q$, $y = 1$ und $z = q$ in Satz 2.4.(5) ein, so folgt $1 < q$, Widerspruch. Also ist $1/q \geq 1$. Angenommen, es ist $1/q = 1$. Dann ist $q = q \cdot 1 = q \cdot (1/q) = 1$, Widerspruch. Somit ist
$$\frac{1}{q} > 1. \tag{1.2}$$
Zusammen mit (1.1) folgt $\sqrt{q} < 1 < 1/q$. Aus Satz 2.3 folgt nun
$$\sqrt{q} < \frac{1}{q}.$$

(iv) Nach (1.2) gilt $1/q > 1$. Setzen wir $x = 1$, $y = 1/q$ und $z = 1/q$ in Satz 2.4.(5), so folgt
$$\frac{1}{q} < \frac{1}{q^2}.$$

Zusammen mit Satz 2.3 folgt die Behauptung. □

Aufgabe 2. Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden, so dass
$$\left| \frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon$$
für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ gilt. Es ist
$$\left| \frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3}{5} \right| = \left| \frac{5(3n+2) - 3(5n+7)}{5(5n+7)} \right| = \left| -\frac{11}{5(5n+7)} \right| = \frac{11}{5(5n+7)}. \tag{2.1}$$
Wählen wir beispielsweise
$$n_0 = \left\lceil \frac{11}{25\varepsilon} - \frac{7}{5} \right\rceil + 2 \in \mathbb{N},$$

wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl ist, die größer oder gleich x ist ("wir runden x auf"), so folgt

$$\left|\frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3}{5}\right| \overset{(2.1)}{=} \frac{11}{5(5n+7)} \leq \frac{11}{5(5n_0+7)} < \varepsilon$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$.

Bemerkung. Es gilt

$$\frac{11}{5(5n_0+7)} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11}{5\varepsilon} < 5n_0 + 7 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11}{25\varepsilon} - \frac{7}{5} < n_0.$$

(1) Würde man nun

$$n_0 = \left\lceil \frac{11}{25\varepsilon} - \frac{7}{5} \right\rceil$$

wählen, so ist $n_0 \notin \mathbb{N}$ für alle $\varepsilon \geq 11/35$. Außerdem ist auch $n_0 > 11/(25\varepsilon) - 7/5$ nicht erfüllt, falls $11/(25\varepsilon) - 7/5 \in \mathbb{N}$.

(2) Würde man

$$n_0 = \left\lceil \frac{11}{25\varepsilon} - \frac{7}{5} \right\rceil + 1$$

wählen, so ist $n_0 \notin \mathbb{N}$ für alle $\varepsilon \geq 55/50$.

<u>*Alternative Lösung*</u>: Es ist

$$\left|\frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3}{5}\right| \overset{(2.1)}{=} \frac{11}{5(5n+7)} \leq \frac{3}{5n} < \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

Wählen wir beispielsweise

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N},$$

so folgt

$$\left|\frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3}{5}\right| \overset{(2.2)}{<} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$.

Bemerkung. Es gilt

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n_0.$$

Würde man nun

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

wählen, so ist $n_0 > 1/\varepsilon$ nicht erfüllt, falls $1/\varepsilon \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen per Induktion.

(a) <u>*Beh.*</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.

- *Induktionsanfang*: $n = 1$.
  Es ist
$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$
- *Induktionsschritt*: $n \to n+1$.
  Es ist
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Es folgt die Behauptung. □

(b) *Beh.* Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.

- *Induktionsanfang*: $n = 1$.
  Es ist
$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}.$$
- *Induktionsschritt*: $n \to n+1$.
  Es ist
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{\text{IV}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Es folgt die Behauptung. □

(c) *Beh.* Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt
$$3^n > 7n^2.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.

- *Induktionsanfang*: $n = 5$.
  Es ist $3^5 = 243 > 175 = 7 \cdot 5^2$.
- *Induktionsvoraussetzung*: Wir nehmen an, dass die Ungleichung für ein $n \geq 5$ gilt.
- *Induktionsschritt*: $n \to n+1$.
  Es ist
$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n \overset{\text{IV}}{>} 3 \cdot 7n^2 = 7n^2 + 7n^2 + 7n^2 \overset{n \geq 5}{>} 7n^2 + 35n + 7 > 7n^2 + 14n + 7 = 7(n+1)^2.$$

Es folgt die Behauptung. □

Aufgabe 4. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq 1$.
<u>*Beh*</u>. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}.$$

Beweis. Sei $0 \leq x \leq 1$. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.

- <u>*Induktionsanfang*</u>: $n = 1$.
  Es ist
  $$1 - x = \frac{(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{1-x^2}{1+x} \leq \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+1\cdot x}.$$
- <u>*Induktionsschritt*</u>: $n \to n+1$.
  Es ist $(1-x)^{n+1} = (1-x)(1-x)^n$. Da $1 - x \geq 0$ ist, folgt
  $$(1-x)^{n+1} = (1-x)(1-x)^n \overset{\text{IV}}{\leq} \frac{1-x}{1+nx}.$$
  Erweitern wir den Bruch auf der rechten Seite der letzten Ungleichung mit $1 + (n+1)x$, so ist
  $$(1-x)^{n+1} \leq \frac{(1-x)(1+(n+1)x)}{(1+nx)(1+(n+1)x)} = \frac{1+nx-(n+1)x^2}{(1+nx)(1+(n+1)x)} \leq \frac{1}{1+(n+1)x}.$$

Es folgt die Behauptung. □

Alternativer Beweis. (Ohne Induktion) Sein $n \in \mathbb{N}$. Für $x = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt. Sei also $0 \leq x < 1$. Dann gilt

$$1 + nx \overset{\text{Satz 3.5}}{\leq} (1+x)^n = \frac{(1-x^2)^n}{(1-x)^n} \leq \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Es folgt die Behauptung. □

Aufgabe 5. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + 2f_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

<u>*Beh*</u>. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per Induktion nach n.

- <u>*Induktionsanfang*</u>: $n = 1$, $n = 2$.
  Es gilt
  $$f_1 = 0 = \frac{1-1}{3} = \frac{2^{1-1} + (-1)^1}{3} \qquad \text{und} \qquad f_2 = 1 = \frac{2+1}{3} = \frac{2^{2-1}+(-1)^2}{3}.$$
- <u>*Induktionsvoraussetzung*</u>: Wir nehmen an, dass die Gleichung für ein n und $n-1$, wobei $n \geq 2$, gilt.
- <u>*Induktionsschritt*</u>:
  Hier muss gezeigt werden, dass die Gleichung dann auch für $n+1$ gilt. Es ist
  $$\begin{aligned} f_{n+1} = f_n + 2f_{n-1} &\overset{\text{IV}}{=} \frac{2^{n-1}+(-1)^n}{3} + 2 \cdot \frac{2^{n-2}+(-1)^{n-1}}{3} = \frac{2^{n-1}+(-1)^n+2^{n-1}+2(-1)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2^n + (-1)^n(1-2)}{3} = \frac{2^{(n+1)-1}+(-1)^{n+1}}{3}. \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □