Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

WS 2018/2019
07. Februar 2019

Erste Klausur zu Analysis I

`Hinweise:`

- Die Antworten in Aufgabe 1 sollen OHNE Beweise gegeben werden.
- Es ist immer genau eine Antwort richtig.
- Die Markierungen müssen deutlich sein.
- Beweise zu den Aufgaben 2–7 sind erforderlich. Es dürfen Sätze aus dem Skript benutzt werden.

Aufgabe 1 (Multiple Choice) [4P.]

(a) Jede Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}[0,1]$ ist Riemann-integrierbar.

☒ Wahr ☐ Falsch

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge mit Grenzfunktion f. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch punktweise gegen f.

☒ Wahr ☐ Falsch

(c) Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} (-n)^{((-1)^n)} = \infty.$$

☐ Wahr ☒ Falsch

(d) Die Funktion $f : (1,2) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$, ist gleichmäßig stetig.

☒ Wahr ☐ Falsch

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+3e^{2x}}\,\mathrm{d}x.$ [3P.]

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x.$ [3P.]

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (x\tan(x) - \log(\cos(x)))\,\mathrm{d}x.$ [3P.]

Lösung:

(a) Es gilt

$$\int \frac{1}{1+3e^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{3e^{2x}}{1+3e^{2x}}\right)\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\int \frac{6e^{2x}}{1+3e^{2x}}\,\mathrm{d}x.$$

Mit Hilfe von Beispiel 11.30(b) erhalten wir nun

$$\int \frac{1}{1+3e^{2x}}\,\mathrm{d}x = x - \frac{\log(1+3e^{2x})}{2}.$$

(b) Es gilt $x^2-x-6 = (x+2)(x-3)$. Mittels Partialbruchzerlegung folgt

$$\frac{x}{x^2-x-6} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x-3}.$$

Zusammen mit Beispiel 11.30(b) erhalten wir

$$\int \frac{x}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\cdot\log(|x+2|) + \frac{3}{5}\cdot\log(|x-3|).$$

(c) Nach Satz 11.26 und Beispiel 11.30(c) folgt

$$\int x\tan(x)\,\mathrm{d}x = -x\log|\cos x| + \int \log|\cos x|\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

Da $\cos x > 0$ für alle $x \in [0, \pi/4]$ gilt, erhalten wir

$$\int_0^{\pi/4} (x\tan(x) - \log(\cos(x)))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} (x\tan(x) - \log(|\cos(x)|))\,\mathrm{d}x \overset{(2.1)}{=} -\frac{\pi}{4}\,\log|\cos\frac{\pi}{4}|.$$

Da $\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ ist, erhalten wir erhalten also

$$\int_0^{\pi/4} (x\tan(x) - \log(\cos(x)))\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\,\log 2.$$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+5\sqrt{n}}-3\sqrt{n}\right).$ [5P.]

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x^2}{\cos(x)-\cos(2x)}.$ [5P.]

Lösung:

(a) Es gilt

$$\sqrt{9n+5\sqrt{n}}-3\sqrt{n} = \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{9n+5\sqrt{n}}+3\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{9+\frac{5}{\sqrt{n}}}+3}.$$

Zusammen mit den Rechenregeln für Grenzwerte erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n+5\sqrt{n}}-3\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{9+\frac{5}{\sqrt{n}}}+3} = \frac{5}{6}.$$

(b) Mit Hilfe der ersten Regel von L'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^2}{\cos(x)-\cos(2x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2x}{-\sin(x)+2\sin(2x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{-\cos(x)+4\cos(2x)} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 4. Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 4^{-\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. [2P.]

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{x\to\infty} f(x).$$ [2P.]

(c) Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, auf denen f monoton wächst und fällt. [2P.]

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Maximalstellen und lokalen Minimalstellen von f. [2P.]

(e) Skizzieren Sie den Graphen von f. [1P.]

(f) Wir definieren die Funktion $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = 2^{-\frac{1}{x}}.$$

Bestimmen Sie alle maximalen Intervalle, auf denen g konvex ist. [2P.]

Lösung:

(a) Auf $(0, \infty)$ ist f als Komposition und Summe differenzierbarer Funktion differenzierbar. Auf $(-\infty, 0)$ ist f als konstante Funktion nach Beispiel 9.5(c) differenzierbar. Bleibt der Fall $x_0 = 0$ zu betrachten. Es gilt

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{0}{x - 0} = 0,$$

sowie

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{4^{-\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}}}{x} \overset{y=1/x}{=} \lim_{y\to\infty} \left(\frac{y}{\exp(y \log 4)} - \frac{y}{\exp(y \log 2)} \right) \overset{8.3(\mathrm{d})}{=} 0.$$

Also stimmen der rechts- und linksseitige Grenzwert überein, und wir erhalten

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Nach Definition 9.3 ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 0$.

(b) Für $x > 0$ gilt

$$f(x) = 4^{-\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{e^{\frac{\log 4}{x}}} - \frac{1}{e^{\frac{\log 2}{x}}}.$$

Da $\exp(x)$ stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{e^{\frac{\log 4}{x}}} - \frac{1}{e^{\frac{\log 2}{x}}} \right) = \frac{1}{e^0} - \frac{1}{e^0} = 0.$$

(c) Für $x > 0$ gilt

$$f'(x) = e^{-\frac{\log 4}{x}} \cdot \frac{\log 4}{x^2} - e^{-\frac{\log 2}{x}} \cdot \frac{\log 2}{x^2} = 2^{-\frac{1}{x}} \frac{\log 2}{x^2} \left(2^{1-\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

Da $2^{-\frac{1}{x}} > 0$ und $\log(2)/x^2 > 0$ für $x > 0$ ist, folgt

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{1-\frac{1}{x}} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{x}\right) \log 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \tag{4.1}$$

und

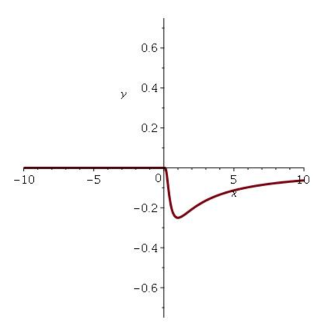
$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{1-\frac{1}{x}} - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{x}\right) \log 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1. \tag{4.2}$$

Mit Satz 10.8 ist f streng monoton wachsend auf $[1, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(0, 1]$. Da f auf $(-\infty, 0]$ konstant 0 und stetig in 0 ist, folgt insgesamt, dass f monoton wachsend auf $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ und monoton fallend auf $(-\infty, 1]$.

(d) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Ein notwendiges Kriterium dafür, dass x_0 eine lokale Extremalstelle ist, ist $f'(x_0) = 0$. Nach (4.1) und (4.2) reicht es, die folgenden drei Fälle zu betrachten:

- 1. Fall: $x_0 = 1$.
  Nach (c) ist f streng monoton wachsend auf $[1, \infty)$ und streng monoton fallend auf $(0, 1]$. Somit ist x_0 eine lokale Minimalstelle.
- 2. Fall: $x_0 = 0$.
  Nach (c) ist f monoton wachsend auf $(-\infty, 0]$ und streng monoton fallend auf $[0, 1]$. Somit ist x_0 eine lokale Maximalstelle.
- 3. Fall: $x_0 < 0$.
  Hier gilt $f(x_0) = 0 = f(x)$ für alle $x \in (2x_0, x_0/2)$. Also ist x_0 nach Definition 10.2 eine lokale Maximal- und Minimalstelle.

(e) Der Graph von f ist gegeben durch



(f) Für alle $x > 0$ gilt

$$g(x) = e^{-\frac{\log 2}{x}}$$

Also ist die Funktion g auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$g'(x) = e^{-\frac{\log 2}{x}} \cdot \frac{\log 2}{x^2} = 2^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{\log 2}{x^2}.$$

Ferner gilt

$$g''(x) = 2^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{\log 2}{x^2}\right)^2 - 2^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{2\log 2}{x^3} = 2^{-\frac{1}{x}} \frac{\log 2}{x^3} \left(\frac{\log 2}{x} - 2\right)$$

Nun ist

$$g''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log 2}{x} - 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{\log 2}{2}.$$

Nach Satz 10.14 ist g dann konvex auf dem Intervall

$$M = \left(0, \frac{\log 2}{2}\right]$$

Aufgabe 5. Sei a eine beliebige reelle Zahl. Wir definieren eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_1 = a$ und $x_{n+1} = \arctan(x_n)$.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \arctan(x)$. Beweisen Sie, dass $f(x) > 0$ für alle $x > 0$ und dass $f(x) < 0$ für alle $x < 0$ gilt. [4P.]

(b) Beweisen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $a > 0$ monoton fallend und für $a < 0$ monoton wachsend ist. [2P.]

(c) Beweisen Sie, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

existiert, und berechnen Sie diesen in Abhängigkeit von a. [4P.]

Lösung:

(a) Es ist $f(0) = 0$ und

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad \text{für alle } x \neq 0.$$

Nach Satz 10.8 ist f streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und es folgt $f(x) > f(0) = 0$ für alle $x > 0$ und $f(x) < f(0) = 0$ für alle $x < 0$.

(b) Da arctan nach Bemerkung 6.21 auf $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend mit $\arctan(0) = 0$ ist, folgt $\arctan(x) > 0$ für alle $x > 0$ und $\arctan(x) < 0$ für alle $x < 0$. Ist $a > 0$, so folgt induktiv, dass $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit (a) erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$x_{n+1} = \arctan(x_n) \overset{(a)}{<} x_n,$$

d.h. die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend. Ist $a < 0$, so folgt induktiv, dass $x_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zusammen mit (a) erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$x_{n+1} = \arctan(x_n) \overset{(a)}{>} x_n,$$

d.h. die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(c) Ist $a = 0$, so folgt $x_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wir erhalten $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Sei also $a \neq 0$. Sei $a > 0$. In (b) wurde gezeigt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine monoton fallende nach unten durch 0 beschränkte Folge ist. Nach Satz 4.19 konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also. Sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Da arctan nach Satz 6.22 stetig ist, folgt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \arctan(x_n) = \arctan(x).$$

Da $\arctan(0) = 0$ ist, folgt zusammen mit (a), dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 0$ ist. Ist $a < 0$, so wurde in (b) gezeigt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende nach oben durch 0 beschränkte Folge ist. Nach Satz 4.19 konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Analog zum Fall $a > 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Aufgabe 6.

(a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n - 2^n}$$

konvergiert. [5P.]

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Untersuchen Sie, für welche $z \in \mathbb{C}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-1)^{3n}$ konvergiert. [5P.]

Lösung:

(a) Es ist $1/(3^n - 2^n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe von Beispiel 4.14(b)(i) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|3^{n+1} - 2^{n+1}|}{|3^n - 2^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n} = 3.$$

Nach Satz 12.18 ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich 3. Nach Satz 12.16 konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 3$, und divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 3$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 3$ gilt

$$\left| \frac{x^n}{3^n - 2^n} \right| = \frac{3^n}{3^n - 2^n} \geq 1,$$

d.h. $(x^n/(3^n - 2^n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge und die Potenzreihe nach Satz 5.2 divergent.

(b) Bevor wir die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-1)^{3n} \tag{6.1}$$

betrachten, schreiben wir zunächst $w = (z-1)^3$ und betrachten die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n. \tag{6.2}$$

Es ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + \frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{(n+1)a_n}} = 1.$$

Nach Satz 12.18 ist der Konvergenzradius der Potenzreihe (6.2) gleich 1. Nach Satz 12.16 konvergiert die Potenzreihe (6.2) somit für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| < 1$ und divergiert für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| > 1$. Folglich konvergiert die Potenzreihe (6.1) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$, und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| > 1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| = 1$ gilt

$$|a_n(z-1)^{3n}| = a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq 1,$$

d.h. $(a_n(z-1)^{3n})_{n\geq 1}$ ist keine Nullfolge und die Reihe (6.1) nach Satz 5.2 divergent.

Aufgabe 7.

(a) Sei $(b_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n.$$
Beweisen Sie, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n b_n\right| \leq b_{N+1}.$$
[2P.]

(b) Beweisen Sie mithilfe von (a), dass die Reihe
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
gleichmäßig auf $[-1,1]$ konvergiert. [1P.]

(c) In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass für alle $x \in (-1,1)$ gilt:
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$
Leiten Sie aus (b) ab, dass diese Gleichung auch für $x = 1$ gilt. [3P.]

Lösung:

(a) Sei $(s_k)_{k\geq 0}$ die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ und S der Grenzwert. Im Beweis des Leibniz-Kriteriums wurde gezeigt, dass $s_{2k+1} \leq S \leq s_{2k}$ für alle $k \geq 0$ ist. Sei nun $N \in \mathbb{N}$. Ist N gerade, so schreiben wir $N = 2k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und es folgt
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n b_n\right| = |S - s_{2k}| = s_{2k} - S \leq s_{2k} - s_{2k+1} = b_{2k+1} = b_{N+1}.$$
Ist N ungerade, so schreiben wir $N = 2k-1$ mit $k \in \mathbb{N}$ und erhalten
$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n b_n\right| = |S - s_{2k-1}| = S - s_{2k-1} \leq s_{2k} - s_{2k-1} = b_{2k} = b_{N+1}.$$

(b) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch
$$f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{k}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$
<u>*Beh.*</u> Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen die Funktion
$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $x \in [0,1]$. Dann ist $(x^{2n+1}/(2n+1))_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach (a) gilt dann

$$|f(x) - f_k(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right| \leq \frac{x^{2k+3}}{2k+3}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $1/(2N+3) < \varepsilon$. Dann gilt für alle $k \geq N$, dass

$$|f(x) - f_k(x)| \leq \frac{x^{2k+3}}{2k+3} \leq \frac{1}{2k+3} \leq \frac{1}{2N+3} < \varepsilon.$$

Nach Definition 12.2 konvergiert $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. Sei nun $x \in [-1,0)$. Dann ist $((-x)^{2n+1}/(2n+1))_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Nach (a) gilt dann

$$|f(x) - f_k(x)| = |f(-x) - f_k(-x)| \leq \frac{(-x)^{2k+3}}{2k+3}.$$

Nun folgt wie im Fall $x \in [0,1]$, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. $\square$

(c) Sei f und die Funktionenfolge $(f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Beweis von (b) definiert. Da f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Polynom stetig ist und nach (b) auf $[-1,1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert, ist f nach Satz 12.14 stetig. Da auch arctan auf $[-1,1]$ nach Satz 6.22 stetig ist, folgt

$$\arctan 1 = \lim_{x\nearrow 1} \arctan(x) = \lim_{x\nearrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$