Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018
Abgabe: Di. 04.12 bis 14:30 Uhr

Alle Antworten müssen begründet werden!
Aufgabe 4 können Sie erst nach der Vorlesung am Donnerstag/Freitag lösen.

Analysis I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. In der Vorlesung haben wir den folgenden Satz bewiesen:
Für $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{12}$ gilt:

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

(a) Beweisen Sie: Für $0 \leqslant x \leqslant 9$ gilt: [5 P.]

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \leqslant \cos x.$$

(b) Beweisen Sie: $3 < \pi < 3,2$. [3 P.]

(c) Beweisen Sie: $2,7 < e < 3$. [3 P.]

Hinweis zu (b). Benutzen Sie diese Formeln, Lem. 8.15 und Def. 8.16 des Kurzskripts.
Hinweis zu (c). Benutzen Sie die Definition von e und Satz 6.10 des Kurzskripts.

Aufgabe 2. Wir definieren die Funktion f durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion f in Punkt $x_0 = 0$ unstetig ist. [5 P.]

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xf(x)$ stetig ist. [5 P.]

(c) Skizzieren Sie den Graphen von f. [2 P.]

(d) Skizzieren Sie den Graphen von g. [2 P.]

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Wir wissen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

divergent für $s = 1$ ist. Beweisen Sie:

(a) Diese Reihe ist divergent für $0 < s < 1$. [2 P.]

(b) Diese Reihe ist konvergent für jede reelle Zahl $s > 1$. [5 P.]

Hinweis zu (b). Benutzen Sie Aufgabe 4 (2) aus Übungsblatt 7.

Aufgabe 4. Stellen Sie für die folgenden Paare (f, g) der Funktionen jeweils fest, welche der Aussagen $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$, $g(x) = O(f(x))$, $g(x) = o(f(x))$ für $x \to \infty$ gelten. [8 P.]

(a) $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x$

(b) $f(x) = e^x$ $\quad g(x) = e^{\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ $\quad g(x) = x^3$

(d) $f(x) = e^{\log^2(x)}$ $\quad g(x) = x^2$