Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19
Abgabe: Di. 27.11 bis 14:30 Uhr

Alle Antworten müssen begründet werden!
Aufgaben 3 und 5 können Sie erst nach der Vorlesung am Donnerstag/Freitag lösen.

Analysis I
Übungsblatt 7

Aufgabe 1. Finden Sie für $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ die kleinste natürliche Zahl n, für die $z^n = 1$ gilt. [2 P.]

Aufgabe 2. Zeigen Sie mittels der Definition (also nur mit ϵ und δ), dass die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig sind: [5+5 P.]

(a) $f(z) = z^2$ (b) $f(z) = |z + 2i|$

Aufgabe 3. Beweisen Sie: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log(x))^m}{x} = 0.$$

[6 P.]

Aufgabe 4.

(1) Sei $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant 0$. Seien $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $\widehat{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$. Beweisen Sie per Induktion: [8 P.]

(a) $S_{2^{n+1}-1} \leqslant a_1 + \widehat{S}_n$ (b) $\widehat{S}_n \leqslant 2S_{2^n}$

(2) Beweisen Sie den folgenden Satz: [6 P.]

> Sei $(a_k)_{k\geqslant 1}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen.
> Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Hinweis zu (2). Eine Reihe mit nichtnegativen Gliedern konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 5. Beweisen Sie: [8 P.]

(a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ (b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

(c) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ (d) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$