Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19
Abgabe: Di. 20.11 bis 14:30 Uhr

Alle Antworten müssen begründet werden!
Aufgaben 4 und 5 können Sie erst nach der Vorlesung am Donnerstag/Freitag lösen.

Analysis I
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist. [5 P.]

Hinweis. Lesen Sie Definition 6.20 und benutzen Sie Satz 5.26.

Aufgabe 2. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{x}\Big) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leqslant 0. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass $f(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist. [4 P.]

(b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f. [3 P.]

(c) Beweisen Sie, dass f monoton wachsend ist. [3 P.]

(d) Beweisen Sie, dass f stetig ist. [5 P.]

Hinweis. Sie dürfen benutzen, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *streng monoton wachsend und stetig ist und dass* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt.*

Aufgabe 3. Sei $I := [a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(I) \subseteq I$. Beweisen Sie, dass ein c in I mit $f(c) = c$ existiert. [4 P.]

Hinweis. Wenden Sie den Satz von Bolzano (s. Theorem 6.15 im Skript) an einer Funktion an.

Aufgabe 4. Fertigen Sie Skizzen der folgenden Mengen an: [8 P.]

(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} = -z\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} = \frac{1}{z}\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid |2z - 3| < 1\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2| = |z + i|\}$

Aufgabe 5. Berechnen Sie Real- und Imaginärteile aller komplexen Zahlen z, für die gilt: [2+3+3P.]

(a) $\dfrac{1}{z} = 2 + 3i$ (b) $z^2 = 1 + 2i$ (c) $z^3 = 8$