Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018
Abgabe: Di. 13.11 bis 14:30 Uhr

Aufgaben 1-3 können Sie schon jetzt lösen. Aufgaben 4-5 können Sie nach der Vorlesung am Donnerstag/Freitag lösen; s. auch Skript. Alle Antworten müssen begründet werden!

Analysis I
Übungsblatt 5

Aufgabe 1.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(3+(-1)^n)^{-n}$ konvergent ist. [4 P.]

(b) Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5+(-1)^n}{3^n}$. [5 P.]

Aufgabe 2. Nach Beispiel 5.14 konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. [7 P.]

Beweisen Sie: $\frac{5}{4} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{7}{4}$.

Hinweis. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ für $n \geqslant 2$.

Aufgabe 3. Sei $(a_n)_{n\geqslant 0}$ eine Folge mit $a_n := (-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Nach Leibniz-Kriterium ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ konvergent. Sei $c_n := \sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}$.

(a) Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ divergent ist. [6 P.]

(b) Warum ist das kein Widerspruch zu Satz 5.25? [3 P.]

Hinweis zu (a). Zeigen Sie, dass $(c_{2n})_{n\geqslant 0}$ keine Nullfolge ist. Dafür benutzen Sie, dass $k(2n-k) \leqslant n^2$ für alle $k, n \in \mathbb{R}$ gilt.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ durch $g(x) := |f(x)|$.

(i) Beweisen Sie mit ϵ und δ: Ist f stetig, dann ist g auch stetig. [4 P.]

(ii) Gilt die Rückrichtung in (i)? Begründen Sie Ihre Antwort. [4 P.]

Aufgabe 5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{falls } x \neq 1, \\ a, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $a = 2$. [2 P.]
(b) Beweisen Sie mit ϵ und δ, dass f nicht stetig in 1 ist. [5 P.]