Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19
Abgabe: Di., 30.10 bis 14:30 Uhr

Alle Antworten müssen begründet werden!

Analysis I
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Folgern Sie aus dem Binomischen Lehrsatz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$ [4 Punkte]

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$ [4 Punkte]

(c) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}.$ [4 Punkte]

Hinweis zu (c). Es gilt $\binom{2n+1}{k} = \binom{2n+1}{2n+1-k}$ für alle $0 \leqslant k \leqslant 2n+1$.

Aufgabe 2. Welche der angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{3n^3 + n - 1}$ (b) $b_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 4}{5n^2 - 6n + 7}$ (c) $c_n = \dfrac{n^3 - 2n + 1}{7n^2 + 4n + 5}$

Welche Regel kann man an diesen Beispielen erkennen? [4+4+4 Punkte]

Hinweis. Teilen Sie den Zähler und den Nenner durch n^k für eine bestimmte k und benutzen Sie Satz 4.16.

Aufgabe 3. Welche der angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{n^2 + 2}{n + 1} - \dfrac{n^2 + 2}{n + 2}$ (b) $b_n = \dfrac{n^2 4^n - 5^n}{3^n + 5^n}$ [4+5 Punkte]

Hinweis zu (b). Teilen Sie den Zähler und den Nenner durch a^n für eine bestimmte $a \in \mathbb{R}$ und benutzen Sie Beispiel 4.14.(c) und Satz 4.16.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4.

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Beweisen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$. [4 Punkte]

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Beweisen Sie, dass die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. [3 Punkte]

Hinweis. (b) ist ganz leicht, wenn Sie eine frühere Aufgabe benutzen. Welche?