Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19

Abgabe: Di. 23.10 bis 14:30 Uhr

Aufgaben 1 und 2 können Sie schon jetzt lösen. Aufgaben 3-5 (Induktionsbeweise) können Sie nach Vorlesung 3 lösen.

Analysis I
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $q \in (0,1)$. Ordnen Sie die Zahlen q, q^2, $\sqrt{q}$, $\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{q^2}$ der Größe nach an. Begründen Sie Ihre Antwort mit Hinweisen auf Sätze und Axiome aus der Vorlesung.

[4 P.]

Aufgabe 2. Sei $\epsilon > 0$. Finden Sie ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle natürlichen $n \geqslant n_0$ gilt:

$$\left|\frac{3n+2}{5n+7} - \frac{3}{5}\right| < \epsilon.$$

[4 P.]

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen per Induktion:

a) Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[5 P.]

b) Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

[6 P.]

c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 5$ gilt $3^n > 7n^2$. [6 P.]

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4. Beweisen Sie die folgende Variante der Bernoullischen Ungleichung: Für alle reellen Zahlen $0 \leqslant x \leqslant 1$ und alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(1-x)^n \leqslant \frac{1}{1+nx}.$$

[8 P.]

Hinweis. Induktion per n, analog zu dem Beweis der Bernoullischen Ungleichung aus der Vorlesung 3 (s. Skript).

Aufgabe 5. Wir definieren eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv[1]:

$$f_1 := 0, f_2 := 1, f_{n+1} := f_n + 2f_{n-1}.$$

Beweisen Sie per Induktion, dass

$$f_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. [7 P.]

Hinweis. Überprüfen Sie diese Formel für $n = 1$ und $n = 2$. Dann setzen Sie voraus, dass sie für $n = k - 1$ und $n = k$ gilt und beweisen, dass diese Formel für $n = k + 1$ gilt. Dabei ist $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

[1] Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} f_3 &= f_2 + 2f_1 = 1, \\ f_4 &= f_3 + 2f_2 = 3, \\ f_5 &= f_4 + 2f_3 = 5. \end{aligned}$$