Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19
Abgabe: Di. 29.01 bis 14:30 Uhr

Alle Antworten müssen begründet werden!

Analysis I
Übungsblatt 14

Aufgabe 1.
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n z^{2n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\sqrt{n}} z^n$

[10 P.]

Aufgabe 2. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\geqslant 1}$ der Fibonacci-Zahlen rekursiv:

$$f_1 = f_2 = 1 \text{ und } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für } n \geqslant 1.$$

(a) Berechnen Sie die minimale n mit $f_n > 100$. [0,5 P.]

(b) Wir definieren die Folge $(x_n)_{n\geqslant 1}$ durch $x_n := \frac{f_n}{f_{n+1}}$. Überprüfen Sie:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}.$$

[1,5 P.]

(c) Beweisen Sie per Induktion, dass $\frac{1}{2} \leqslant x_n \leqslant 1$ für alle $n \geqslant 1$ gilt. [2 P.]

(d) Beweisen Sie, dass $(x_n)_{n\geqslant 1}$ Cauchy-Folge ist. [4 P.]

(e) Mit Hilfe von (b) und (d) berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$. [2 P.]

(f) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe [1 P.]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n.$$

(g) Beweisen Sie, dass für $|z| < r$ die Identität $f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$ gilt. [4 P.]

(h) Mit Hilfe des Satzes 12.21, berechnen Sie $f^{(10)}(0)$. [2 P.]

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen.

(a) Beweisen Sie: $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup\limits_{n\to\infty}(a_n) + \limsup\limits_{n\to\infty}(b_n)$. [4 P.]

(b) Geben Sie einen Beispiel, welches zeigt, dass $<$ in (a) möglich ist. [4 P.]

Aufgabe 4.

(a) Schreiben Sie die Funktion e^{-t^2} in der Form einer Potenzreihe. [1 P.]

(b) Schreiben Sie die Funktion

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$$

in der Form einer Potenzreihe.

[4 P.]

Hinweis zu (b). Benutzen Sie Korollar 12.9 des Skripts.