

Alle Antworten müssen begründet werden!

Analysis I  
Übungsblatt 13

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a)  $\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$       (b)  $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos(3x) dx$       (c)  $\int_0^\pi \cos^2(x) dx$  [9P.]

**Aufgabe 2.** Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a)  $\int \frac{3x}{9 + 4x^2} dx$       (b)  $\int \frac{3x^2}{9 + 4x^2} dx$   
(c)  $\int \frac{1}{(2x - 5)^2} dx$       (d)  $\int \frac{x}{(x - 1)^2} dx$   
(e)  $\int \frac{1}{(x - 1)(x + 2)} dx$  [15P.]

**Aufgabe 3.** Mit einem Gegenbeispiel widerlegen Sie die folgende Aussage:

Sei  $(f_n)_{n \geq 1}$  eine Funktionenfolge mit  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  konvergiert. Dann konvergiert die Funktionenfolge  $(f_n^2)_{n \geq 1}$  gleichmäßig gegen  $f^2$ . [6P.]

**Aufgabe 4.** Wir betrachten die Gleichung

$$\sin x = \frac{x}{2}.$$

- (a) Beweisen Sie, dass diese Gleichung mindestens eine Lösung im Intervall  $[\pi/2, \pi]$  hat. [3P.]  
(b) Beweisen Sie, dass diese Gleichung genau drei Lösungen in  $\mathbb{R}$  hat. [7P.]