Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19
Abgabe: Di. 8.01 bis 14:30 Uhr

Alle Antworten müssen begründet werden!

Analysis I
Übungsblatt 11

Aufgabe 1.

(a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion

$$h(x) = \arcsin\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)$$

und berechnen Sie dort $h'(x)$. [4P.]

(b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$. [4P.]

(c) Das ist die Entwicklung der Aufgabe 5(b) von Übungsblatt 9. Dort haben Sie den Definitionsbereich der Funktion g bestimmt, die durch

$$g(x) := \log(\tan\frac{x}{2}).$$

definiert ist und gezeigt, dass

$$g'(x) = \frac{1}{\sin x}$$

ist. Der Definitionsbereich der Funktion g ist aber klein.

Finden Sie eine differenzierbare Funktion f, die auf $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ definiert ist und die dort die Eigenschaft $f'(x) = \frac{1}{\sin x}$ hat. [7P.]

Aufgabe 2. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $f = f'$. Beweisen Sie, dass ein $C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = Ce^x$ für alle $x \in (a,b)$ gilt. [6P.]

Hinweis. Wenden Sie einen der Sätze des Abschnitts 10 des Kurzskripts auf die Funktion $g(x) = f(x) \cdot e^{-x}$ an.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Für jede natürliche Zahl $n \geqslant 1$ definieren wir die folgende Treppenfunktion $\varphi_n \in \mathcal{T}[0,1]$:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 \leqslant x < 1 - \frac{1}{n}, \\ n, & \text{falls } 1 - \frac{1}{n} \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{falls } x = 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{dx}.$$

[3P.]

(b) Bestimmen Sie für jedes $x \in [0,1]$ [3P.]

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x).$$

(c) Die Teilaufgaben (a)&(b) widerlegen eine Aussage. Welche? [3P.]

Aufgabe 4. Nur mit Hilfe der Definition 11.6 und Riemann-Kriteriums beweisen Sie, dass die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, Riemann-integrierbar ist und berechnen Sie

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}.$$

[7P.]

Hinweis. Beispiel 11.8 ist ähnlich und wurde in der Vorlesung am Dienstag betrachtet.

Aufgabe 5. Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Wir definieren die Funktion $\max(f,g) : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$\max(f,g)\,(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geqslant g(x) \text{ ist,} \\ g(x), & \text{falls } g(x) \geqslant f(x) \text{ ist.} \end{cases}$$

Beweisen Sie die Formel

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|.$$

[3P.]

Daraus folgt: Wenn f und g Riemann-integrierbar sind, dann ist $\max(f,g)$ auch.