Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018/19
Abgabe: Di. 18.12 bis 14:30 Uhr

Alle Antworten müssen begründet werden!
Aufgaben 3 und 4 können Sie erst nach der Vorlesung am Freitag lösen.

Analysis I
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Beweisen Sie:

(a) f ist differenzierbar. [3P.]

(b) f' ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$. [3P.]

(c) Ist $g(x) = f^2(x)$, so hat g ein lokales Minimum in $x_0 = 0$. [3P.]

(d) Für jedes $\epsilon > 0$ ist g im Intervall $(0, \epsilon)$ nicht monoton wachsend und im Intervall $(-\epsilon, 0)$ nicht monoton fallend. [3P.]

(e) Skizzieren Sie den Graph von g. [3P.]

Hinweis zu (b). Es genügt zu beweisen, dass f' nicht stetig in $x_0 = 0$ ist.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.

(a) Beweisen Sie, dass f nur eine kritische Stelle besitzt. Finden Sie diese Stelle x_0. [3P.]

(b) Beweisen Sie, dass f streng monoton wachsend auf $(0, x_0)$ und streng monoton fallend auf (x_0, ∞) ist. [3P.]

(c) Ohne Rechner beantworten Sie die Frage: Was ist größer, e^π, oder π^e?
Begründen Sie Ihre Antwort. [3P.]

(d) Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$ ist. [3P.]

Hinweis. Schauen Sie sich die Definition 8.6 und Sätze 8.5 und 10.8 des Kurzskripts an.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie für die Funktion [3P.]

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

maximale Intervalle, auf denen f konvex bzw. konkav ist.

Aufgabe 4.

(a) Beweisen Sie: $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ für $x \to 0$. [2P.]

(b) Beweisen Sie: $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ für $x \to 0$. [2P.]

(c) Berechnen Sie: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{1 - e^{(x^2)}}$. [3P.]

(d) Berechnen Sie: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right)$. [3P.]

Hinweis zu (a) *und* (b). Satz 6.10 und Lemma 8.14 des Kurzskripts sind hier nützlich.