Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Dr. Christian Axler

WiSe 2018
erstellt am 12.10.2018
keine Abgabe

Analysis I
Übungsblatt 0

Aufgabe 1. Beweisen Sie die Aussagen in a) und b) per Induktion.

a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ gilt $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

b) Für alle natürlichen Zahlen n ist $2^{3n} - 1$ durch 7 teilbar[1].

c) Schreiben Sie diese Aussagen ohne Worte, aber mit Quantoren $\forall$ und $\exists$ auf.

Aufgabe 2.

a) Gegeben sei die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Schreiben Sie die logische Negation dieser Aussage auf; dabei soll das Negation-Symbol $\neg$ nicht benutzt werden.

b) Entscheiden Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall n \geqslant n_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

c) Denken Sie eine wahre Aussage der Form:

$$\forall \ \colorbox{blue}{} \ \exists \ \colorbox{red}{} : \ \colorbox{yellow}{}$$

aus, so dass die Aussage

$$\exists \ \colorbox{red}{} \ \forall \ \colorbox{blue}{} : \ \colorbox{yellow}{}$$

auch wahr ist. In Kästchen der gleichen Farbe sollen gleiche Formeln stehen.

Aufgabe 3.
a) Beweisen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen folgendes gilt:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}.$$

b) Bestimmen Sie alle oberen und alle unteren Schranken für die Menge

$$\mathcal{M} = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

c) Bestimmen Sie $\inf \mathcal{M}$ und $\sup \mathcal{M}$.

---

[1] Seien k und n zwei ganze Zahlen. Man sagt, dass n durch k teilbar ist (in Zeichen $k|n$), falls eine ganze Zahl m existiert, so dass $n = km$ gilt.