Analysis I

Das Skript orientiert sich im wesentlichen nach den Skripten der Professoren Rüdiger Braun und Wilhelm Singhof. Die Beweise werden in den Vorlesungen, aber nicht in dem Skript gegeben.

1 Mengen und Abbildungen

1.1. Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung *verschiedener* Elemente zu einem Ganzen.
1.2. Notation. Es gibt zwei Methoden, Mengen aufzuschreiben:

(a) Durch Aufzählung: $\mathcal{M}_1 = \{1, 2, 5\}$, $\mathcal{M}_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$.

(b) Durch Angabe einer Eigenschaft: $\mathcal{M}_3 := \{p \,|\, p \text{ und } 2^p - 1 \text{ sind Primzahlen}\}$.

(c) Wichtige Mengen:

  (i) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die natürlichen Zahlen,
  (ii) $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die ganzen Zahlen,
  (iii) $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \,|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ die rationalen Zahlen,
  (iv) $\mathbb{R}$ die reellen Zahlen. Eine genauere Beschreibung der reellen Zahlen folgt später.

1.3. Definition. Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B, wenn jedes Element von A ein Element von B ist. Man schreibt $A \subseteq B$.

1.4. *Beispiel.* $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

1.5. *Bemerkung.* Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt.

1.6. Definition. Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leere* Menge. Diese wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

1.7. Defintion. Seien M_1, M_2 zwei Mengen.
a) $M_1 \cup M_2 = \{x \,|\, x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ (Vereinigung),

b) $M_1 \cap M_2 = \{x \,|\, x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ (Durchschnitt),

c) $M_1 \setminus M_2 = \{x \,|\, x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ (Differenz),

d) $M_1 \triangle M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ (Symmetrische Differenz).

1.8. *Beispiel.* Es gilt $\emptyset \triangle M = M$.

1.9. Satz. Für je drei Mengen M_1, M_2, M_3 gilt

$$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3),$$
$$(M_1 \cap M_2) \cup M_3 = (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3).$$

1.10. Definition. Sei X eine Menge. Die Menge $\mathcal{P}(X) = \{M \,|\, M \subseteq X\}$ heißt *Potenzmenge* von X.

1.11. *Beispiel.* Es gilt $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Es gilt $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

1.12. Definition. Seien X, Y Mengen. Die Menge

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

heißt *kartesisches Produkt* der Mengen X und Y. Die Elemente von $X \times Y$ heißen *Paare.*

1.13. *Beispiel.* Sei $X = \{1, 2, 3\}$. Dann gilt:

$$X^2 := X \times X = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}.$$

1.14. Definition. Seien X und Y zwei Mengen. Eine *Abbildung* $f : X \to Y$ besteht aus dem *Definitionsbereich* X, dem *Zielbereich* Y und einer Vorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element $y = f(x)$ aus Y zuordnet.

1.15. Definition. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$.
(a) $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ heißt *Bild* von M unter f.
(b) $f^{-1}(N) = \{x \mid f(x) \in N\}$ heißt *Urbild* von N unter f.

1.16. *Beispiel.* $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $f : X \to Y$, $f(x) = x^2$, $M = \{1, 2\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann $f(M) = \{1, 4\}$, $f^{-1}(N) = \{1, 2\}$.

1.17. Definition. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Die Verknüpfung ist definiert als $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

1.18. *Beispiel.* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$. Dann ist $(f \circ f)(3) = 81$.

2 Die reellen Zahlen

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und einer Vergleichsrelation $>$, welche drei Gruppen von Axiomen (Körperaxiome, Anordnungsaxiome, Vollständigkeitsaxiom) erfüllt:

Körperaxiome.

(a) (Kommutativgesetze) Es gilt $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

(b) (Assoziativgesetze) Es gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(c) (Null und Eins) Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $0 + x = x$, $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) (Inverses Element der Addition). Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.

(Es zeigt sich, dass y eindeutig bestimmt ist; man bezeichnet es mit $-x$.)

(e) (Inverses Element der Multiplikation) Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es $z \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot z = 1$.

(Es zeigt sich, dass z eindeutig bestimmt ist; man schreibt $z = x^{-1}$, oder $z = \frac{1}{x}$.)

(f) (Distributivgesetz) Es gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2.1. Satz.

1) Das Nullelement ist eindeutig.
2) Das Einselement ist eindeutig.
3) Das additiv Inverse und das multiplikativ Inverse sind eindeutig.
4) Es gilt $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
5) Es gilt $(-1) \cdot x = -x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
6) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten $x^{-1} \neq 0$ und $(x^{-1})^{-1} = x$.

2.2. Satz. Wenn $x \cdot y = 0$ ist, dann ist $x = 0$ oder $y = 0$.

Anordnungsaxiome. Es gibt eine Teilmenge P von $\mathbb{R}$, welche die beiden folgenden Axiome erfüllt:
(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten:

$$x \in P, \ \ x = 0, \ \ -x \in P.$$

(b) Sind x und y in P, dann sind $x + y$ und xy in P.

Statt $x \in P$ schreibt man $x > 0$.
Die Elemente $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ heißen *positiv*, und mit $-x > 0$ *negativ*.
Man schreibt $y > x$ oder $x < y$, falls $y - x > 0$ ist.
(Insbesondere bedeutet $x < 0$, dass $-x > 0$ gilt, also x negativ ist.)
Man schreibt $y \geqslant x$, falls $y > x$ oder $y = x$ gilt.
Man schreibt $x \leqslant y$, falls $y \geqslant x$ gilt.

2.3. Satz. Ist $x > y$ und $y > z$, dann gilt $x > z$.

2.4. Satz.

1) Ist $x < 0$ und $y < 0$, dann ist $xy > 0$. Ist $x > 0$ und $y < 0$, dann ist $xy < 0$.
2) Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, so ist $x^2 > 0$. Speziell gilt $1 > 0$.
3) Ist x positiv, so auch x^{-1}. Ist x negativ, so auch x^{-1}.
4) Ist $x < y$, dann gilt $x + z < y + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$.
5) Ist $x < y$ und $z > 0$, dann gilt $xz < yz$. Ist $x < y$ und $z < 0$, dann gilt $xz > yz$.
6) Ist $0 < x < y$, so gilt $x^2 < y^2$.

2.5. Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den *Absolutbetrag* als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

2.6. Satz. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

2.7. Satz (*Dreiecksungleichung*). Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Alles was wir bisher beschrieben haben, kann $\mathbb{Q}$ auch.
Um das Vollständigkeitsaxiom zu formulieren, müssen wir einige Begriffe definieren.

2.8. Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Menge.

a) Die Menge M heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leqslant c$ für alle $x \in M$. Jedes c mit dieser Eigenschaft heißt *obere Schranke* von M.

b) Die Menge M heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geqslant d$ für alle $x \in M$. Jedes d mit dieser Eigenschaft heißt *untere Schranke* von M.

c) Die Menge M heißt *beschränkt*, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

2.9. *Beispiel.* Die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 2\}$ ist beschränkt. Eine der oberen Schranken ist $c = \frac{3}{2}$.

2.10. Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es ein $c \in M$ gibt, welches obere Schranke von M ist, so bezeichnet man c als das *Maximum* von M, in Zeichen $c = \max M$. Dann ist c das größte Element von M. Wenn M ein kleinstes Element hat, so bezeichnet man es als *Minimum* von M und schreibt $\min M$ dafür.

2.11. Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

a) Wenn es eine kleinste obere Schranke von M gibt, dann bezeichnet man sie als *Supremum* von M, in Zeichen $\sup M$.

b) Wenn es eine größte untere Schranke von M gibt, dann bezeichnet man sie als *Infimum* von M, in Zeichen $\inf M$.

Beispiel. Sei $M = \{1 - \frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1\}$. Dann ist M nach unten und nach oben beschränkt und besitzt ein Minimum ($= 0$) und kein Maximum. Ferner gilt: $\sup M = 1$ und $\inf M = 0$.

2.11*. Satz. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Für $c \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

a) $c = \sup M$.

b) c ist obere Schranke von M und kein $d < c$ ist obere Schranke von M.

c) Für alle $x \in M$ gilt $x \leqslant c$ und für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x > c - \epsilon$.

2.12. Vollständigkeitsaxiom. Für jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ existiert in $\mathbb{R}$ ein Supremum.

2.13. *Bemerkung.* Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Diese Menge M besitzt genau dann ein Maximum, wenn $\sup M \in M$ gilt. In diesem Fall gilt $\max M = \sup M$. Die analoge Aussage für das Minimum gilt ebenfalls.

2.14. Satz. Zu jedem $a > 0$ existiert genau ein $b > 0$ mit $b^2 = a$. Dieses b heißt *Quadratwurzel* von a, in Zeichen $b = \sqrt{a}$.

2.15. Satz. Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Die Menge $\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$ ist beschränkt, aber hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$.

2.16. Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren die folgenden Intervalle:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\},\\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\},\\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\},\\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\},\\
[a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x\},\\
(a,\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\},\\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant b\},\\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}.
\end{aligned}$$

3 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

3.1. Definition. Eine Teilmenge M der reellen Zahlen heißt *induktiv*, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:
(a) $1 \in M$,
(b) wenn $x \in M$, dann auch $x + 1 \in M$.

$\mathbb{R}$ ist induktiv. Der Durchschnitt induktiver Mengen ist induktiv. Daher gibt es eine kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$. Diese Teilmenge heißt die Menge der *natürlichen Zahlen* und wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet.

3.2. Satz. *(Archimed)* Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

3.3. Satz. *(Eudoxos)* Zu jedem $b > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

3.4. Satz. (Prinzip der vollständigen Induktion) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Wenn die folgenden beiden Aussagen gelten, dann gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$:
(a) $A(1)$ gilt,
(b) wenn $A(n)$ gilt, dann auch $A(n + 1)$.

3.5. Satz. (*Bernoulli-Ungleichung*) Sei $x > -1$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Beweis.
Induktionsbasis. Die Formel gilt für $n = 1$:

$$(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x.$$

Induktionsschritt. Wir nehmen die Formel (1) für $n = k$ an, wobei k eine konkrete Zahl aus $\mathbb{N}$ ist. Dann beweisen wir diese Formel für $n = k + 1$.

Also haben wir angenommen $(1 + x)^k \geqslant 1 + kx$. Es gilt

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geqslant (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geqslant 1+(k+1)x.$$

Somit gilt die Formel (1) für $n = k+1$. Nach Satz 3.4 gilt diese Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.
□

4 Folgen und ihre Grenzwerte

4.1. Definition. Man schreibt Folgen von reellen Zahlen als $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.2. Beispiel.

1) Die Folge $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ kann auch als $(1^2, 2^2, 3^2, \dots)$ oder $(1, 4, 9, \dots)$ geschrieben werden.
2) Sei $q \in \mathbb{R}$. Die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann auch als $(q^1, q^2, q^3, \dots)$ geschrieben werden.
3) Man kann Folgen rekursiv definieren. Zum Beispiel: $a_1 := 1, a_2 := 1, a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ für $n \geqslant 2$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$. Diese Folge heißt *Fibonacci-Folge.*

Bezeichnungen.

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n.$ (Summenzeichen)
2) $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$ (Produktzeichen)
3) $0! := 1$ und $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$. (n-Fakultät)

4.3. Satz. (*arithmetische und geometrische Progressionen*)

(a) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

4.4. Definition. Für $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $k \leqslant n$ definieren wir den Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Beispiel.

$$\binom{5}{2} := \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)} = 10.$$

4.5. Satz.

(a) $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

(b) Für $n \geqslant k \geqslant 1$ $(n, k \in \mathbb{N})$ gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

(c) Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(d) Es gilt $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Pascalsches Dreieck:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \\
\cdots
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots
\end{array}$$

4.6. Satz. (Binomischer Lehrsatz) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \\
&= \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{n} x^n y^0.
\end{aligned}$$

4.7. Definition. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, falls ein $M \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|a_n| \leqslant M.$$

4.8. Satz.

(a) Für jedes $a \neq 0$ ist die Folge $(a \cdot n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt.

(b) Für jedes $q \in (-1, 1)$ ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(c) Für jedes $q \in (-1, 1)$ ist die Folge $(nq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(d) Für jedes $q \in (-1, 1)$ ist die Folge $(n^2q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(e) Für jedes $q \in (-1, 1)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(n^kq^n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

4.9. Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und sei $b \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt *konvergent gegen* b, falls gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geqslant N$ gilt: $|a_n - b| < \epsilon$.

Man sagt dann, dass b der *Grenzwert* der Folge ist, und schreibt $b = \lim_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to b$. Die Folge heißt *divergent*, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

Man sagt, dass eine Aussage für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ gilt, wenn es höchstens endlich viele Ausnahmen gibt. Damit liest sich die Definition der Konvergenz wie folgt:

$b = \lim_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn in jedem Intervall $(b-\epsilon, b+\epsilon)$ fast alle Folgenglieder liegen.

4.10. Beispiel. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left|\frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \\ \Leftrightarrow\quad & \left|\frac{2(n+1)-(2n+3)}{2(2n+3)}\right| < \epsilon \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2(2n+3)} < \epsilon \\ \Leftrightarrow\quad & 4n+6 > \frac{1}{\epsilon} \\ \Leftrightarrow\quad & n > \Big(\frac{1}{\epsilon} - 6\Big)/4. \end{aligned}$$

Sei N die erste natürliche Zahl, die größer als $\big(\frac{1}{\epsilon} - 6\big)/4$ ist. Dann gilt $\left|\dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{1}{2}\right| < \epsilon$ für alle $n \geqslant N$. Deswegen ist $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{1}{2}$.

4.11. Satz. Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

4.12. Satz. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

4.13. Satz. *(Sandwichsatz)* Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen mit $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Wenn die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen denselben Grenzwert L, dann konvergiert auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen L.

4.14. Beispiel.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$.

  (i) Falls $|q| < 1$ ist, so gilt $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$.

  (ii) Falls $|q| > 1$ ist, so divergiert die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  (iii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

  (iv) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

(c) Für jedes $q \in (-1, 1)$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$.

Beweis zu (c). Nach Satz 4.8.(e) existiert ein $M \in \mathbb{R}$ so dass $|n^{k+1}q^n| \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gilt

$$-\frac{M}{n} \leqslant n^k q^n \leqslant \frac{M}{n}.$$

Nach Sandwichsatz gilt $\lim_{n\to\infty} n^k q^n = 0$. $\square$

4.15. Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge*.

4.16. Satz. (Rechenregeln) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

(d) Ist $b \neq 0$, dann ist $b_n \neq 0$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

4.17. Satz. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \leqslant b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a \leqslant b$.

4.18. Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leqslant a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Sie heißt *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Analog definiert man streng monoton fallend.

4.19. Satz. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt, so konvergiert die Folge und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

4.20. Beispiel. Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv: $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_{n+1} := 2a_n - 3a_n^2$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}.$$

Beweis. In Behauptung unten werden wir beweisen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt ist. Jetzt werden wir diese Behauptung benutzen:

Nach Satz 4.19 konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $b \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch die Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b. Dann gilt

$$b = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2a_n - 3a_n^2) = 2\lim_{n\to\infty} a_n - 3(\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = 2b - 3b^2.$$

Daraus folgt $b = 0$ oder $b = \frac{1}{3}$. Es kann nicht sein, dass $b = 0$ ist, weil die Folge mit $a_1 = \frac{1}{5}$ startet und monoton wächst (insbesondere sind alle Mitglieder der Folge größer gleich $\frac{1}{5}$, deswegen muss der Grenzwert der Folge auch größer gleich $\frac{1}{5}$ sein). Also ist $b = \frac{1}{3}$.

`Behauptung.` Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt. Etwas genauer: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 < a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Beweis (per Induktion).
Induktionsanfang: Da $a_1 = \frac{1}{5}$ und $a_2 = \frac{7}{25}$ ist, gilt diese Behauptung für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung: Wir nehmen an, dass diese Behauptung für $n = k$ gilt:

$$0 < a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant \frac{1}{3}.$$

Induktionsschritt: Mit der Induktionsvoraussetzung beweisen wir, dass diese Behauptung für $n = k+1$ gilt, also beweisen wir

$$0 < a_{k+1} \leqslant a_{k+2} \leqslant \frac{1}{3}.$$

(a) $0 < a_{k+1}$ folgt direkt aus der Induktionsvoraussetzung.

(b) $a_{k+1} \leqslant a_{k+2} \overset{\text{eingesetzt}}{\iff} a_{k+1} \leqslant 2a_{k+1} - 3a_{k+1}^2 \iff 3a_{k+1}^2 \leqslant a_{k+1} \overset{(a)}{\iff} a_{k+1} \leqslant \frac{1}{3}.$

Die letzte Ungleichung dieser Kette stimmt nach der Induktionsvoraussetzung. Dann stimmt auch $a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$.

(c) $a_{k+2} \leqslant \frac{1}{3} \iff 2a_{k+1} - 3a_{k+1}^2 \leqslant \frac{1}{3} \iff 6a_{k+1} - 9a_{k+1}^2 \leqslant 1 \iff 0 \leqslant (3a_{k+1} - 1)^2.$

Die letzte Ungleichung dieser Kette stimmt. Dann stimmt auch $a_{k+2} \leqslant \frac{1}{3}$.

Nach Induktionsprinzip ist die Behauptung bewiesen. □

□

4.21. Definition. Sei $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Ist ferner $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, \dots)$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel. Sei $a_n = (-1)^n$ und sei $n_k = 2k$. Dann ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$.

4.22. Satz. Jede Teilfolge einer beschränkten Folge ist beschränkt und jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent.

4.23. Theorem (Satz von Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

4.24. Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geqslant N$ ist.

4.25. Theorem (Konvergenzkriterium von Cauchy). Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sind äquivalent:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

4.26. Beispiele.

(a) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beweis zu (b).

5 Reihen

5.1. Definition. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge. Der formale Ausdruck $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *Reihe.* Für jede natürliche Zahl $\ell \geqslant 1$ heißt die Zahl $s_\ell = \sum_{n=1}^{\ell} a_n$ die ℓ-te *Partialsumme* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wenn die Folge der Partialsummen $(s_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ konvergent (divergent) ist, dann sagt man, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent (divergent)* ist. Wenn $\lim_{\ell\to\infty} s_\ell = b$ ist, dann schreibt man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b$.

5.2. Satz. Wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Nullfolge.

5.3. Konvention. Wir setzen $x^0 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also auch für $x = 0$.
Das haben wir schon einmal benutzt.

5.4. Beispiel. Sei $q \in \mathbb{R}$. Die *geometrische Reihe* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist divergent für $|q| \geqslant 1$. Ansonsten gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } |q| < 1.$$

5.5. Beispiel. Die *harmonische Reihe* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

5.6. Beispiel. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

5.7. Satz. (**Konvergenzkriterium von Leibniz**). Sei $(b_n)_{n\geqslant 1}$ eine monoton fallende Nullfolge (insbesondere gilt $b_n \geqslant 0$ für alle $n \geqslant 1$). Dann konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$.

5.8. Beispiel. Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ konvergiert.

5.9. Definition. Eine Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

5.10. Satz. Absolut konvergente Reihen sind konvergent.

5.11. Bemerkung. Wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann gilt $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

5.12. Majorantenkriterium. Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(c_n)_{n\geqslant 1}$ Folgen mit $|a_n| \leqslant c_n$ für alle $n \geqslant 1$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

5.13. Bemerkung. Man bezeichnet dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ als *konvergente Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

5.14. Beispiel. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant 2$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

5.15. Quotientenkriterium. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Wenn ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leqslant q < 1$$

für alle $n \geqslant N$ gilt, dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

5.16. Definition. Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Quotientenkriterium zeigt, dass diese Reihe in der Tat konvergiert (und sogar absolut konvergiert).

Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen.

5.17. Definition. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.
1) f heißt *injektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
2) f heißt *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
3) f heißt *bijektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

5.18. Bemerkung. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Setze $W := \{f(x) \,|\, x \in X\}$ und definiere eine neue Abbildung $g : X \to W$ mit derselben Vorschrift $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist g surjektiv.

5.19. Beispiel. Die Quadratfunktion $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv, die Nullabbildung $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 0$, auch nicht. Die Identität $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$, ist bijektiv. Wir werden sehen, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektiv, aber nicht surjektiv ist.

5.20. Definition. Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Die Abbildung $g : Y \to X$, $y \mapsto x$, wobei $f(x) = y$ ist, heißt *Umkehrabbildung* von f. Man schreibt $g = f^{-1}$.

5.21. Beispiel. Sei $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto x^2$. Nach Satz 2.14 ist f bijektiv. Die Umkehrabbildung f^{-1} ist die Wurzelfunktion $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt{x}$.

5.22. Satz. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist bijektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ existiert.

Absolut konvergente Reihen.

5.23. Beispiel. Die Reihe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergiert gegen 0. Die Umordnung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}_{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{5} + \underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}}_{-\frac{1}{6}} + \frac{1}{7} + \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{4}}_{-\frac{1}{8}} + \dots$$

ist nach dem Leibniz-Kriterium ebenfalls konvergent, hat aber einen Reihenwert $> \frac{1}{2}$. Die Umordnung

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geqslant 1} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geqslant 1} - \frac{1}{3} + \dots$$

ist divergent.

5.24. Satz (Umordnungsatz). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und sei σ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf sich. Setze $b_n = a_{\sigma(n)}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

5.25. Satz (Cauchy-Produkt). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und sei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big).$$

Beweis. Satz 5.25 folgt aus dem Satz von Mertens, dessen Beweis von der Webseite des Kurses heruntergeladen werden kann.

5.26. Satz (Additionstheorem für die Exponentialfunktion). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

5.27. Korollar. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$.

6 Stetige Funktionen

6.1. Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$, sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in D$. Dann heißt f *stetig in* x_0, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass Folgendes gilt:

Ist $x \in D$ und $|x - x_0| < \delta$, dann gilt $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

6.2. Bemerkung. Wir schreiben diese Definition und ihre Verneinung mit Quantoren:
$f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

$f : D \to \mathbb{R}$ ist unstetig in $x_0 \in D$, falls gilt:

$$\exists \epsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists x \in D : |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geqslant \epsilon.$$

6.3. Beispiel.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist stetig.

(b) Konstante Funktion ist stetig.

(c) Definiere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Dann ist f unstetig.

6.4. Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}$ und sei $y \in \mathbb{R}$. Dann heißt y *Berührungspunkt* von D, wenn es eine Folge in D gibt, die gegen y konvergiert. Kurz ausgedrückt:

$$\exists (x_n)_{n \geqslant 1} \text{ mit allen } x_n \in D : \lim_{n \to \infty} x_n = y.$$

6.5. Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ ein *Berührungspunkt* von D. Wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

falls für jede Folge $(x_n)_{n \geqslant 1}$ in D mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

6.6. Satz. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig in x_0.

(b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

6.7. Satz. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$. Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig in x_0:

(a) $f + g$, wobei $f + g$ punktweise definiert ist: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

(b) $f - g$ und $f \cdot g$, die ebenfalls punktweise definiert sind.

(c) Falls $g(x_0) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in x_0.

6.8. Definition. Eine Funktion der Form $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, wobei $a_k \in \mathbb{R}$ für alle k ist, heißt *Polynom*. Sind p, q zwei Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom ist, und ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$, so bezeichnet man die Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

als *gebrochen-rationale Funktion.*

6.9. Bemerkung. Polynome und gebrochen-rationale Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich.

6.10. Satz.

$$\left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right| \leqslant 2\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \ \ \text{falls } |x| \leqslant 1 + \frac{N}{2}.$$

Damit kann man die Eulersche Zahl $e := \exp(1)$ so genau ausrechnen wie man möchte: $e = 2.7182818285\ldots$.

6.11. Satz. Die Exponentialfunktion ist stetig.

6.12. Satz. Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ Teilmengen und seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen. Ist f stetig in $x_0 \in D$ und g stetig in $f(x_0)$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.

6.13. Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(-x^2)$, ist stetig.
Ihr Graph $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ heißt *Gaußsche Glockenkurve.*

6.14. Definition. Intervalle der Form $[a, b]$ mit reellen Zahlen $a < b$ heißen *kompakte Intervalle.*

6.15. Theorem (Nullstellensatz von Bolzano). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.

6.16. Korollar (Zwischenwertsatz). Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

6.17. Definition. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, seien $A \subset X$ und $B \subset Y$. Dann definieren wir das *Bild* von A als

$$f(A) := \{f(x) \,|\, x \in A\}$$

und das *Urbild* von B als

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}.$$

6.18. Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf $[a, b]$ ihr Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $c, d \in [a, b]$, so dass $f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$ für alle $x \in [a, b]$ ist.

6.19. Korollar. Sei I ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f(I)$ ein Intervall oder eine einelementige Menge.

6.20. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt, dass $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, dann heißt f *monoton wachsend*. Wenn sogar immer $f(x_1) < f(x_2)$ gilt, dann heißt f *streng monoton wachsend*. Entsprechend erklärt man (streng) monoton fallend.

6.21. Bemerkung. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Nach Korollar 6.19 ist $f(I) = J$ ein Intervall. Dann ist $f : I \to J$ bijektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist streng monoton wachsend. Die analogen Aussagen gelten für streng monoton fallendes f.

6.22. Satz. Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} auch stetig.

6.23. Beispiel.

(a) Ist n eine ungerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Sie ist auch bijektiv. Sie besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

(b) Ist n eine gerade natürliche Zahl, so ist die Abbildung $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \to x^n$, streng monoton wachsend und stetig. Sie ist auch bijektiv. Sie besitzt also eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

7 Die komplexen Zahlen

7.1. Definition. Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert man eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$
$$(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

7.2. Satz. Diese Rechenoperationen erfüllen die Körperaxiome.

7.3. Bemerkung.

(a) Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$, ist bijektiv und mit den Rechenoperationen verträglich. Man versteht daher $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen aus 7.1 und schreibt für $(x, 0)$ einfach wieder x.

(b) Man setzt $i = (0, 1)$. Dann gilt $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$. Ferner gilt für $y \in \mathbb{R}$ die Formel $iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0, y)$. Also gilt $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$. Wir werden in Zukunft die Schreibweise $x + iy$ benutzen.

7.4. Bezeichnung. Die Menge $\mathbb{R}^2$, versehen mit diesen Rechenregeln, bezeichnet man als den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Das Element $(0, 1)$ schreibt man als i. Die Rechenregeln lauten in dieser Schreibweise

$$\begin{aligned} (x + iy) + (u + iv) &= (x + u) + i(y + v) \\ (x + iy) \cdot (u + iv) &= (xu - yv) + i(xv + yu). \end{aligned}$$

Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ bezeichnet man x als *Realteil* und y als *Imaginärteil* von z. Man schreibt $x = \operatorname{Re}(z)$ und $y = \operatorname{Im}(z)$.

7.5. Definition. Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so heißt $\overline{z} = x - iy$ die zu z *konjugierte* komplexe Zahl.

7.6. Satz. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(a) $\overline{\overline{z}} = z$,

(b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(d) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,

(e) $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ mit $z\overline{z} \geqslant 0$.

7.7. Definition. Der *Absolutbetrag* von $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Für reelle z stimmen die beiden Definitionen von $|z|$ überein.

7.8. Satz. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(a) $|zw| = |z||w|$,

(b) $|\overline{z}| = |z|$,

(c) (Dreicksungleichung) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$,

(d) $||z| - |w|| \leqslant |z - w|$.

7.9. Definition. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $c \in \mathbb{C}$. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen c, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|z_n - c| < \epsilon$ für alle $n \geqslant N$ gilt. Man schreibt in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c$.

7.10. Satz. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Folge ist genau dann konvergent, wenn die reellen Folgen $\big(\mathrm{Re}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\big(\mathrm{Im}(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind. In diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

7.11. Satz. (Cauchy-Kriterium). Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

(a) Die Folge konvergiert.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geqslant N$ gilt $|z_n - z_m| < \epsilon$.

7.12. Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $s_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j$ die n-te Partialsumme. Man sagt, dass die Reihe $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergiert, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. In diesem Fall ist $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ der Reihenwert. Der wird wieder mit $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ bezeichnet.

7.13. Satz. Majorantenkriterium, Quotientenkriterium, Umordnungssatz und der Satz über das Cauchy-Produkt gelten auch für komplexe Reihen.

7.14. Definition. Die komplexe Exponentialfunktion ist durch dieselbe Reihe definiert wie die reelle:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

7.15. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig* in $z_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z \in D$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Eine Funktion heißt *stetig*, wenn sie zu jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

7.16. Satz. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ und sei $z_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig in z_0.

(b) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$,

d.h. für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z) = f(z_0)$.

7.17. Satz. Die Rechenregeln für stetige Funktionen (Sätze 6.7 und 6.12) gelten auch für komplexe Funktionen. Insbesondere sind Polynome stetig auf ganz $\mathbb{C}$ und gebrochen rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

8 Spezielle Funktionen

8.1. Definition.

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n > C$ für alle $n \geqslant N$ gilt.

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, wenn es zu jedem $C \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n < C$ für alle $n \geqslant N$ gilt.

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt und sei $f : D \to \mathbb{R}$. Für $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \pm\infty$ schreiben wir $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Exponentialfunktion

8.2. Satz. (Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion)

(a) $\exp(0) = 1$.

(b) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(c) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z) \neq 0$ und

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

(d) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

(e) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $|\exp(ix)| = 1$.

8.3. Satz. (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion)

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) > 0$.

(b) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.

(c) $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$.

(d) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^m} = \infty. \tag{1}$$

Beweis.
(d) Sei $C > 0$ beliebig. Für $x > C \cdot (m + 1)!$ gilt

$$\frac{\exp(x)}{x^m} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{x^m} > \frac{\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}}{x^m} = \frac{x}{(m + 1)!} > C.$$

Deswegen gilt (1).

Der Logarithmus

8.4. Definition. Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus*. Man schreibt $\log(x)$.

8.5. Satz.

(a) Der natürliche Logarithmus ist stetig und streng monoton wachsend.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\log(\exp(x)) = x$. Für $x > 0$ ist $\exp(\log(x)) = x$.

(c) $\log\big((0, \infty)\big) = \mathbb{R}$.

(d) Für $x, y > 0$ ist $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

(e) $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$.

(f) Für $x > 0$ ist $\log(1/x) = -\log(x)$.

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \log(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty$

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x)}{x} = 0$.

Die allgemeine Potenzfunktion

8.6. Definition. Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ definieren wir $a^z = \exp(z \log a)$.

8.7. Bemerkung.

(a) Diese Definition ist mit den bereits bestehenden Spezialfällen a^n, a^{-1} und $a^{1/n}$ kompatibel.

(b) Es gilt speziell $e^z = \exp(z)$.

8.8. Satz.

(a) Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(a^x)^y = a^{xy}$.

(b) Für $a > 0$ und $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $a^{z+w} = a^z a^w$.

(c) Für $a, b > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $(ab)^z = a^z b^z$.

(d) Für $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $\left(\frac{1}{a}\right)^z = a^{-z}$.

Trigonometrische Funktionen

8.9. Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet man $\sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix))$ den *Sinus* von x und $\cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix))$ den *Cosinus* von x.

8.10. Satz.

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ und $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

(b) Sinus und Cosinus sind stetig.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

(d) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(e) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt der trigonometrische Pythagorassatz:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

(f) Für $x \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

8.11. Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ definiert man Cosinus und Sinus von z wie folgt:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

8.12. Satz. (Additionstheoreme) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

8.13. Lemma. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos y - \cos x = -2\sin\Big(\frac{y-x}{2}\Big)\sin\Big(\frac{x+y}{2}\Big).$$

8.14. Lemma. Für $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{12}$ gelten:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x^2}{2} &\leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \\ x - \frac{x^3}{6} &\leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}. \end{aligned}$$

8.15. Lemma. Die Cosinusfunktion ist auf dem Intervall $[0, 2]$ monoton fallend.

8.16. Definition. Die Kreiszahl π ist dadurch definiert, dass $\frac{\pi}{2}$ die Nullstelle des Cosinus im Intervall (0,2) ist.

8.17. Satz.

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten $\sin(x + \pi) = -\sin x$ und $\cos(x + \pi) = -\cos x$.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

(d) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\cos(2\pi) = 1$ und $\sin(2\pi) = 0$.

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\} = \{(k + \frac{1}{2})\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

8.18. Definition. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

8.19. Satz.

(a) Die Funktion cos ist auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und bildet es bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Ihre Umkehrfunkton ist $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

(b) Die Funktion sin ist auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf $[-1, 1]$ ab. Ihre Umkehrfunkton ist $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(c) Die Funktion tan ist auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend und bildet es bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Ihre Umkehrfunktion ist $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Weitere Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion

8.20. Bemerkung.

(a) $\exp(2\pi i) = 1$, $\exp(\pi i) = -1$, $\exp(\pi i/2) = i$, $\exp(3\pi i/2) = -i$.

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$. Man sagt "exp hat Periode $2\pi i$."

(c) Ist $x \in \mathbb{R}$, so gilt $\exp(ix) = 1$ genau dann, wenn $x = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ ist.

(d) (Polarkoordinaten) Ist $z \in \mathbb{C}$, so existieren $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r \geqslant 0$ mit $z = re^{i\varphi}$.

(e) Seien $r, s \geqslant 0$ und $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$. Für $z = re^{i\varphi}$ und $w = se^{i\psi}$ gilt $zw = rse^{i(\varphi+\psi)}$.

(f) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(g) Sei $n \geqslant 1$ eine natürliche Zahl.

Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es genau n Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$.

Für $z = re^{i\varphi}$ mit $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ sind diese w wie folgt:

$$w_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{i\varphi + i2\pi k}{n}}, \ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

(h) Insbesondere gibt es zu jedem natürlichen $n \geqslant 1$ genau n Zahlen w mit $w^n = 1$.

Diese Zahlen sind

$$w_k = e^{\frac{i2\pi k}{n}}, \ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Sie heißen n-te *Einheitswurzeln.*

Landau-Symbole

Achtung: Die Landau-Symbole bezeichnen keine Funktionen.

8.21. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sei

- $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von D, oder
- $a = \infty$ und D nach oben unbeschränkt, oder
- $a = -\infty$ und D nach unten unbeschränkt.

(a) Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)), \ x \to a,$$

falls folgendes gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

(b) Man schreibt

$$f(x) = O(g(x)), \ x \to a,$$

falls einer der folgenden Fälle erfüllt ist:

1) $a = \infty$ und es gibt $C > 0$, so dass $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ für alle $x \in D$ mit $x > C$ ist.
2) $a = -\infty$ und es gibt $C > 0$, so dass $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ für alle $x \in D$ mit $x < -C$ ist.
3) $a \in \mathbb{R}$ und es gibt $\epsilon, C > 0$, so dass $|f(x)| \leqslant C|g(x)|$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \epsilon$ ist.

8.22. Beispiel.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x^n = o(\exp(x))$, $x \to \infty$.

(b) $\log x = o(\frac{1}{x})$, $x \to 0$.

(c) $\cos x = O(1)$, $x \to \infty$.

9 Differentialrechnung

9.1. Definition.

(a) Ein Intervall in $\mathbb{R}$ heißt offen, wenn es die Form (a, b) hat.

(b) Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *offen*, wenn D eine Vereinigung von offenen Intervallen ist.

9.2. Satz. Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ ist offen genau dann, wenn es zu jedem $x \in D$ ein $\epsilon > 0$ mit $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq D$ gibt.

9.3. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in D$. Falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert (in $\mathbb{R}$), dann sagt man, f sei in x_0 *differenzierbar* und schreibt $f'(x_0)$ für den Grenzwert. In diesem Fall bezeichnet man $f'(x_0)$ als *Ableitung* von f in x_0.

Ist f in jedem Punkt von D differenzierbar, so heißt f differenzierbar in D. Dann ist $f' : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

9.4. Bemerkung. Je nach Kontext schreibt man auch $\frac{df}{dx}(x_0)$ oder $\dot{f}(x_0)$ für die Ableitung.

9.5. Beispiel.

(a) Für $c \in \mathbb{R}$ betrachten wir die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und $f' = \mathbf{0}$.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f differenzierbar und $f' = \mathbf{1}$.

(c) exp, sin und cos sind in $x_0 = 0$ differenzierbar. Es gelten $\exp'(0) = 1$, $\sin'(0) = 1$ und $\cos'(0) = 0$.

(d) $\exp' = \exp$.

(e) $\cos' = -\sin$.

(f) $\sin' = \cos$.

(g) $\sqrt[3]{x}$ ist in 0 nicht differenzierbar (Tutorium).

9.6. Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $x_0 \in D$. Dann ist f genau dann differenzierbar in x_0, wenn es eine in x_0 stetige Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$$

für alle $x \in D$. In diesem Fall gilt $\varphi(x_0) = f'(x_0)$.

9.7. Satz. Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.

9.8. Satz. (Rechenregeln) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

(a) $f + g$ ist differenzierbar mit $(f + g)' = f' + g'$.

(b) fg ist differenzierbar mit $(fg)' = f'g + g'f$.

(c) Ist $c \in \mathbb{R}$, so ist cf differenzierbar mit $(cf)' = cf'$.

(d) Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}.$$

9.9. Korollar. Polynome sind differenzierbar. Genauer: für $p(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n$ gilt $p'(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n n x^{n-1}$. Gebrochene rationale Funktionen sind überall dort differenzierbar, wo sie definiert sind.

9.10. Satz. (Kettenregel) Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ offen und seien $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen. Ist f differenzierbar in $x_0 \in D$ und g differenzierbar in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x_0, und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

9.11. Beispiel.

(a) $\sin'(x) = \cos(x)$.

Man kann das beweisen durch die Anwendung der Kettenregel an $\sin(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$.

(b) $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

9.12. Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei $x_0 \in D$, sei f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Sei g die Umkehrfunktion von f. Dann ist g in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

9.13. Beispiel. $\log'(y) = \dfrac{1}{y}$.

9.14. Satz.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

9.15. Beispiel.

(a) $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

(b) $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ für $-1 < y < 1$.

9.16. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Ist f differenzierbar in D und f' differenzierbar in $x_0 \in D$, so heißt f *zweimal differenzierbar* in x_0. Man schreibt dann $f''(x_0)$. Analog definiert man f''' u.s.w. Man benutzt auch folgende Notation:

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'', \dots, f^{(n+1)} = (f^{(n)})', \dots$$

9.17. Beispiel. Für ein fest gewähltes $\alpha \in \mathbb{R}$ definiere $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \cdot \log(x))$. Dann gilt

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\ f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

10 Der Mittelwertsatz und seine Folgerungen

10.1. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein *(globales) Maximum* hat, wenn $f(x) \leqslant f(x_0)$ für alle $x \in D$ ist. In diesem Fall bezeichnet man x_0 als *Maximalstelle*. Analog definiert man Minimum und Minimalstelle. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt *Extremalstelle*, wenn x_0 eine Maximalstelle oder Minimalstelle ist.

Beispiel. Der Cosinus hat in jedem Punkt der Form $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, eine Maximalstelle. Das Maximum ist 1.

10.2. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \to \mathbb{R}$ und sei $x_0 \in D$. Wir sagen, dass f in x_0 ein *lokales Maximum* hat, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{ist } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \epsilon, \text{ so ist } f(x) \leqslant f(x_0).$$

In diesem Fall bezeichnet man x_0 als *lokale Maximalstelle*. Wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass gilt:

$$\text{ist } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \epsilon \text{ und } x \neq x_0, \text{ so ist } f(x) < f(x_0),$$

dann ist x_0 eine *strikte lokale Maximalstelle*. Analoge Definitionen gelten für Minima.

Der Punkt x_0 heißt *lokale Extremalstelle* von f, wenn x_0 eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle von f ist.

10.3. Satz. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x_0 \in (a, b)$ eine lokale Extremalstelle von f. Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann gilt $f'(x_0) = 0$.

10.4. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, dann heißt x_0 *kritische Stelle* von f.

Bemerkung. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist $x_0 = 0$ eine kritische Stelle aber keine lokale Extremalstelle.

10.5. Satz. (Satz von Rolle) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Wenn $f(a) = f(b)$ ist, dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

10.6. Theorem. (Mittelwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $x \in (a, b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

10.7. Satz. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f konstant.

10.8. Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt:

(a) Wenn $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist, dann ist f streng monoton wachsend.

(b) Es gilt $f'(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$ genau dann, wenn f monoton wachsend ist.

Bemerkung. Der Umkehrsatz zu 10.8 (a) gilt nicht: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend. Trotzdem ist $f'(0) = 0$.

10.9. Satz. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei $x_0 \in (a, b)$ und sei f zweimal differenzierbar in x_0. Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist, dann besitzt f in x_0 ein striktes lokales Minimum. Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist, dann besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

Beispiel.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\cos(x)$. Dann ist $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$.
Wegen $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\frac{\pi}{4}) > 0$ und $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2} < 0$ besitzt f' in $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ eine Nullstelle x_0. Dort gilt $f''(x_0) = -2\sin(x_0) - x\cos(x_0) < 0$. Also besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$, besitzt in $x_0 = 0$ ein striktes lokales Minimum, welches sogar global ist. Es gilt aber $f''(0) = 0$. Daher liefert Satz 10.9 kein notwendiges Kriterium.

(c) Betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass f im Punkt $x_0 = 0$ differenzierbar ist mit $f'(0) = \frac{1}{2}$.
Es ist bemerkenswert, dass es keine Umgebung von 0 gibt, in der f monoton wächst.

10.10. Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für jede Wahl von $c, x, d \in I$ mit $c < x < d$ gilt

$$f(x) \leqslant f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \cdot (x - c).$$

Die Funktion f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

10.11. Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, ist konvex.

10.12. Definition. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn zu je zwei Punkten $P, Q \in M$ die Verbindungsstrecke von P und Q in M liegt.

10.13. Bemerkung. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn die Menge $\{(x, y) \mid x \in I, y \geqslant f(x)\}$ konvex ist.

10.14. Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) zweimal differenzierbar ist. Die Funktion f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geqslant 0$ für alle $x \in (a, b)$ ist.

10.15. Satz. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann existiert $x \in (a, b)$ mit

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x).$$

10.16. (Erste Regel von de l'Hôpital) Seien $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = 0.$$

Wenn $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

10.17. (Zweite Regel von de l'Hôpital) Seien $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Sei

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} g(x) = \infty.$$

Wenn $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann existiert auch $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

10.18. Bemerkung. Die Varianten der ersten und zweiten Regel von de l'Hôpital für $x \nearrow b$ und $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ gelten ebenfalls. Die Regeln gelten außerdem für die Fälle $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ und $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$.

10.19. Beispiel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{\sin(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{2x \cos(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

11 Integralrechnung

11.1. Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Diese Funktion heißt *Treppenfunktion*, wenn $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ existieren, so dass f auf Intervallen (x_{k-1}, x_k), $k = 1, \ldots, n$, konstant ist. Mit $\mathcal{T}[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.

11.2. Bemerkung. Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so sind auch cf und $f + g$ in $\mathcal{T}[a, b]$. Daher ist $\mathcal{T}[a, b]$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller Abbildungen aus $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$.

11.3. Definition. Ist $f \in \mathcal{T}[a, b]$, ist $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und f konstant auf (x_{k-1}, x_k) mit dem Wert c_k für $k = 1, \ldots, n$, so definiert man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

11.4. Bemerkung.

(a) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ und $c \in \mathbb{R}$, so gelten

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Daher ist

$$\mathcal{T}[a, b] \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

(b) Sind $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $f \leqslant g$, also $f(x) \leqslant g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

11.5. Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann definieren wir *Oberintegral* und *Unterintegral* von f wie folgt:

$$\int_{a}^{b_*} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\Big\{\int_a^b \psi(x)\,\mathrm{d}x \,\Big|\, \psi \in \mathcal{T}[a, b],\ \ \psi \geqslant f\Big\},$$

$$\int_{a^*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\Big\{\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x \,\Big|\, \phi \in \mathcal{T}[a, b],\ \ \phi \leqslant f\Big\},$$

11.6. Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Diese Funktion heißt *Riemann-integrierbar*, wenn folgendes gilt:

$$\int_{a}^{b_*} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a^*}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Den gemeinsamen Wert bezeichnet man mit $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und nennt ihn *(bestimmtes) Integral* von f über $[a,b]$.

11.7. Satz (Riemann-Kriterium). Für eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sind gleichwertig:

(a) f ist Riemann-integrierbar.

(b) Zu jedem $\epsilon>0$ gibt es Treppenfunktionen $\tilde{\phi},\tilde{\psi}\in\mathcal{T}[a,b]$, für die gilt $\tilde{\varphi}\leqslant f\leqslant\tilde{\psi}$ und

$$\int\limits_a^b (\tilde{\psi}(x)-\tilde{\phi}(x))\,\mathrm{d}x<\epsilon.$$

(c) Es gibt Folgen $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ und $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ in $\mathcal{T}[a,b]$, so dass für jedes $n\geqslant 1$ gilt $\phi_n\leqslant f\leqslant\psi_n$ und

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b (\psi_n(x)-\phi_n(x))\,\mathrm{d}x=0.$$

Für je zwei Folgen $(\phi_n)_{n\geqslant 1}$ und $(\psi_n)_{n\geqslant 1}$ wie in (c) gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \psi_n(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \phi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

11.8. Beispiel. Die Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ ist Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

11.9. Satz. Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und sei $c\in\mathbb{R}$. Dann gelten:

(a) cf ist Riemann-integrierbar mit $\int\limits_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x=c\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) $f+g$ ist Riemann-integrierbar mit $\int\limits_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

11.10. Bezeichnung. Für eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$ definieren wir Funktionen $f_+,f_-:D\to\mathbb{R}$ durch

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x), & \text{falls } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{sonst,}\end{cases}\qquad f_-(x)=\begin{cases}-f(x), & \text{falls } f(x)\leqslant 0,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann gelten $f=f_+-f_-$ und $|f|=f_++f_-$.

11.11. Satz. Für Riemann-integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gelten

(a) f_+ und f_- sind Riemann-integrierbar.

(b) $|f|$ ist Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\Big| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx} \leqslant M(b-a),$$

wenn $M = \sup\{|f(x)| \,\big|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ ist.

(c) $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind Riemann-integrierbar.

11.12. Satz. Für Riemann-integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gelten:

(a) f^2 ist Riemann-integrierbar.

(b) $f \cdot g$ ist Riemann-integrierbar.

11.13. Bezeichnung. Sei $f : D \to W$ eine Abbildung. Sei $E \subseteq D$ eine Teilmenge. Eine *Einschränkung* von f auf E ist die Abbildung

$$f|_E : \begin{array}{l} E \to W, \\ x \mapsto f(x). \end{array}$$

11.14. Satz. Sei $a < b < c$ und sei $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ Riemann-integrierbar sind. In diesem Fall gilt:

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

11.15. Definition. Man setzt $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x := 0$ und für $a < b$

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

11.16. Satz. Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

11.17. Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

11.18. Beispiel. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, ist nicht gleichmäßig stetig.

11.19. Satz. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.

11.20. Satz. Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

11.21. Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $c \in I$. Definiert man

$$F : I \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

so ist F differenzierbar mit $F' = f$.

11.22. Definition. Sei Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f, wenn $F' = f$ gilt.

11.23. Bemerkung. (a) Ist F eine Stammfunktion zu f, so schreibt man

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{dx}.$$

(b) Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich durch eine Konstante.

11.24. Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = F(b) - F(a).$$

11.25. Satz (Partielle Integration). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f', g' stetig. Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{dx} = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{dx}.$$

11.26. Satz (Partielle Integration für unbestimmte Integrale). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f', g' stetig. Dann gilt:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{dx} = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{dx}.$$

11.27. Beispiel. (a) $\int xe^x\,\mathrm{dx} = e^x(x-1)$.
(b) $\int \log x\,\mathrm{dx} = x\log x - x$.

11.28. Satz (Substitutionsregel). Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi : J \to I$ differenzierbar mit stetiger Ableitung. Dann gilt für $a, b \in J$:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{dx}.$$

11.29. Satz (Subtitutionsregel für unbestimmte Integrale). Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle, sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\varphi : J \to I$ differenzierbar mit stetiger Ableitung. Sei $F(x)$ eine Stammfunktion für $f(x)$. Dann gilt

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt} = F(\varphi(t)).$$

11.30. Beispiel.

(a)

$$\int_a^b f(2t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\int_{2a}^{2b} f(x)\,\mathrm{dx}.$$

(b) (Logarithmisches Integral)

Ist $\varphi : I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung, so gilt

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,\mathrm{dx} = \log|\varphi(x)|.$$

(c)

$$\int \tan x\,\mathrm{dx} = -\log|\cos x|.$$

11.31. Satz (Partialbruchzerlegung).

(a) Jedes Polynom $Q(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$ kann in Linearfaktoren zerlegt werden:

$$Q(z) = a_n(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2}\dots(z - z_r)^{m_r}.$$

Dabei sind $z_1, \dots, z_r$ verschiedene Nullstellen des Polynoms $Q(z)$.

(Die natürlichen Zahlen $m_1, \dots, m_r$ heißen *Vielfachheiten* der Nullstellen.)

(b) Für je zwei komplexe Polynome $P(z)$ und $Q(z)$ existierem ein Polynom $T(z)$ und Zahlen $c_{j,k} \in \mathbb{C}$, so dass gilt:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = T(z) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{c_{j,k}}{(z - z_j)^k}.$$

Hier sind $z_1, \dots, z_r$ und $m_1, \dots, m_r$ wie in (a).

Das Polynom T und die Zahlen $c_{j,k}$ sind eindeutig bestimmt.

11.32. Beispiel. Wir betrachten $f(x) := \frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$. Dann gilt:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$

Daraus folgt

$$\int f(x)\,\mathrm{dx} = \log|x| - \frac{2}{x-1}.$$

12 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

12.1. Definition. Sei D eine Menge, seien $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *punktweise* gegen f, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

12.2. Definition. Sei D eine Menge, seien $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und $f : D \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $x \in D$ und alle $n \geqslant N$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Diese beiden Definitionen gelten genauso, wenn man $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ ersetzt.

12.3. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise. Obwohl alle f_n stetig sind, ist die Grenzwertfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

unstetig.

12.4. Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$. Dann ist die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dasselbe gilt auch für komplexen Definitionsbereich und/oder komplexe Zielmenge.

12.5. Satz. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{dx}.$$

12.6. Satz. Sei $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, eine Folge von Funktionen, die gegen eine Funktion f punktweise konvergiert. Angenommen, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Jede Funktion f_n ist differenzierbar und die Ableitung f_n' ist stetig.
- Die Folge $(f_n')_{n\geqslant 1}$ ist gleichmäßig konvergent.

Dann ist f differenzierbar, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x)$$

für alle $x \in (a,b)$.

12.7. Beispiel. Definiere $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Es gilt $f_n'(x) = \cos(nx)$. Diese Folge konvergiert noch nicht einmal punktweise, wie man durch Einsetzen von $x = \pi$ sieht.

12.8. Definition. Sei D eine Menge, seien $f_k : D \to \mathbb{R}$, $k \geqslant 1$, Funktionen.

- Für $n \geqslant 1$ heißt die Funktion $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ die *n-te Partialsumme* der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$.
- Für $x \in D$ versteht man unter $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ die Zahl $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$, wenn sie existiert.

  In dem Fall sagt man, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ *in dem Punkt x konvergent* ist.
- Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt *konvergent* in D, wenn sie in jedem Punkt $x \in D$ konvergent ist.
- Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt *gleichmäßig konvergent* in D, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent ist.

  Dieselbe Definition gilt auch für komplexwertige Funktionen.

12.9. Korollar.

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und seien $f_k : D \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen. Wenn die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent ist, dann ist ihre Summe stetig. Dasselbe gilt auch für komplexen Definitionsbereich und/oder komplexe Zielmenge.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent, dann ist ihre Summe Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,\mathrm{dx}.$$

(c) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung f_k'.

Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergent und die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'$ gleichmäßig konvergent, dann ist die erste Summe differenzierbar und es gilt

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

für alle $x \in (a, b)$.

12.10. Satz. Sei D eine Menge. Für jedes $k \geqslant 1$ sei $f_k : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Angenommen, dass für jedes $k \geqslant 1$ eine Konstante $a_k \geqslant 0$ existiert, so dass $|f_k(x)| \leqslant a_k$ für alle $x \in D$ ist. Ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent.

12.11. Definition. Unter einer *komplexen Potenzreihe* verstehen wir eine Funktion der Form

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

wobei $a, c_0, c_1, \dots$ feste komplexe Zahlen sind. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller komplexen Zahlen z, für die diese Reihe konvergiert.

12.12. Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $r \geqslant 0$ sei

$$B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\} \quad \text{und} \quad \overline{B}_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant r\}.$$

Ferner sei $B_\infty(a) = \mathbb{C}$ und $\overline{B}_\infty(a) = \mathbb{C}$.

12.13. Satz. Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Sei $z_1 \in \mathbb{C}$ so, dass diese Reihe in z_1 konvergent ist. Ist $0 \leqslant \rho < |z_1 - a|$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho(a)$.

12.14. Definition. Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann definiert man ihren *Konvergenzradius* als

$$r = \sup\Big\{|z-a| \,\Big|\, \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ ist konvergent}\Big\}.$$

Dabei sind $r = 0$ und ∞ zugelassen. Wegen des Satzes 12.13 ist $r = \infty$ gleichbedeutend damit, dass die Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert.

12.15. Beispiel. Für $s = 0, 1, 2, \dots$ definieren wir die Funktionen $J_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$J_s(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Die Funktion J_s heißt *Bessel-Funktion* der Ordnung s. Der Konvergenzradius der Bessel-Funktion J_s ist ∞. Eine konvergente Majorante der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(s+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

die gegen $\exp(\frac{x^2}{4})$ konvergiert.

12.16. Satz. Sei r der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Dann gelten:

(a) Die Potenzenreihe konvergiert absolut auf $B_r(a)$.

(b) Ist $0 < \rho < r$, so konvergiert sie gleichmäßig auf $\overline{B}_\rho(a)$.

(c) Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(a)$ divergiert die Potenzreihe.

12.17. Korollar. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Sie definiert auf $B_r(a)$ eine stetige Funktion.

12.18. Satz. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Ist $c_n \neq 0$ für fast alle n und existiert

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

so ist C gleich dem Konvergenzradius r der Potenzreihe.

12.19. Beispiel.

(a) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞.

Das folgt aus Quotientenkriterium 5.15 mit $a_n := \frac{z^n}{n!}$.

(b) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert genau dann, wenn $|z| < 1$ ist.
Die Konvergenz im Fall $|z| < 1$ folgt aus dem Quotientenkriterium 5.15 mit $a_n = z^n$. Die Divergenz im Fall $|z| \geqslant 1$ folgt aus dem Fakt, dass die Folge $(z^n)_{n\geqslant 0}$ keine Nullfolge ist. Deswegen hat diese Reihe den Konvergenzradius 1.

(c) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ hat den Konvergenzradius 0. (Siehe Satz 12.18.)

12.20. Definition. Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ heißt *reell*, wenn a sowie alle c_n reell sind.

12.21. Satz. Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ eine reelle Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann gilt:

(a) Auf $(a-r, a+r)$ ist die Funktion f beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f'(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} \text{ für } a - r < x < a + r.$$

(b) Für jedes $n \geqslant 0$ gilt

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

12.22. Definition. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. Für $N \in \mathbb{N}$ setze

$$b_N := \sup_{n\geqslant N} a_n.$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt, besitzt also einen Grenzwert

$$\ell = \lim_{N\to\infty} b_N.$$

Dieses ℓ heißt *Limes superior* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und hat folgende Bezeichnung:

$$\ell = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach oben unbeschränkte Folge ist, dann setzt man $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Analog definiert man *Limes inferior* $\ell' = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

12.23. Bemerkung.

(a) Es gilt
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(b) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann stimmen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ überein.

(c) Wenn $a_n = (-1)^n b_n$ für eine konvergente Folge (b_n) mit $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n > 0$ ist, dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = b$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -b$.

12.24. Satz (Hadamard). Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann gilt

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Beweis. Setze $\ell := \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Es ist klar: $\ell \geqslant 0$. Wir betrachten nur den Fall $0 < \ell < \infty$. Um zu zeigen, dass $r = \frac{1}{\ell}$ ist, es genügt, folgende Behauptung zu beweisen:

Behauptung.

(a) Ist $|z-a| > \frac{1}{\ell}$, dann divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

(b) Ist $|z-a| < \frac{1}{\ell}$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Beweis zu (a). Wir haben $|z-a|\cdot\ell>1$. Dann existieren unendlich viele Werte n mit

$$|z-a|\cdot\sqrt[n]{|c_n|}>1.$$

(Sonst existiert $N\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\geqslant N$ gilt: $|z-a|\cdot\sqrt[n]{|c_n|}\leqslant 1$. Dann wäre $|z-a|\cdot\ell\leqslant 1$, ein Widerspruch.) Also gilt für unendlich viele Werte n:

$$|c_n(z-a)^n|>1.$$

Deswegen ist $\big(c_n(z-a)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Also divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Beweis zu (b). Wir haben $|z-a|\cdot\ell<1$. Wir wählen q mit $|z-a|\ell<q<1$. Dann existiert $N\in\mathbb{N}$, so dass für alle $n\geqslant N$ gilt:

$$|z-a|\sqrt[n]{|c_n|}<q.$$

(Sonst existieren unendlich viele Werte $n_1<n_2<\dots$, so dass $|z-a|\cdot\sqrt[n_i]{|c_{n_i}|}\geqslant q$ für alle n_i gilt. Dann wäre $|z-a|\cdot\ell\geqslant q$, ein Widerspruch.) Also gilt für alle $n\geqslant N$:

$$|c_n(z-a)^n|<q^n.$$

Dann hat die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ die konvergente Majorante $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Somit ist diese Reihe konvergent. □

12.25. Beispiel.

(a) Sei $\beta\in\mathbb{R}$. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\beta(z-a)^n$ hat den Konvergenzradius 1.

(b) Die Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ hat bekanntlich den Konvergenzradius ∞. Also ist

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty.$$

(c) Betrachte

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}z^{4n}.$$

Dann gilt für den Konvergenzradius r:

$$\frac{1}{r}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[4n]{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4n}}=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}.$$

Daraus folgt

$$r=\sqrt[4]{2}.$$

13 Taylor-Reihen

13.1 Definition. Sei I ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Man sagt, dass f sei *n-mal stetig differenzierbar* oder *der Klasse C^n*, wenn f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist. Wenn f stetig ist, sagt man, f sei der Klasse C^0. Wenn f beliebig oft differenzierbar ist, sagt man, f sei der Klasse C^∞. Man schreibt dann $f \in C^n(I)$ bzw. $f \in C^\infty(I)$.

13.2. Satz. (Taylor-Formel) Sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ der Klasse C^{n+1} für ein $n \in \mathbb{N}$. Sind $a, x \in I$, so gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(x)$$

mit

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

13.3. Korollar. (Restglied von Cauchy) Unter den Voraussetzungen von Satz 13.2 existiert ein ξ zwischen a und x, so dass:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-a)(x-\xi)^n.$$

13.4. Korollar. (Restglied von Lagrange) Unter den Voraussetzungen von Satz 13.2 existiert ein ξ zwischen a und x, so dass:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

13.5. Beispiel. Seien $f = \exp$, $a = 0$. Dann gilt $f^{(n)}(a) = 1$ für alle n. Also gilt

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x),$$

mit

(a) (Cauchy-Restglied)

$$R_{n+1}(x) = \frac{\exp(\xi)}{n!}\; x(x-\xi)^n$$

für ein ξ zwischen 0 und x.

(b) (Lagrange-Restglied)

$$R_{n+1}(x) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}\; x^{n+1}$$

für ein (anderes) ξ zwischen 0 und x.

13.6. Beispiel. Bestimme
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x(1-\cos(x))}.$$
Wir brauchen die Taylorentwicklung des Sinus bis $n = 3$ und des Cosinus bis $n = 2$:
$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + R_4(x) \quad \text{mit} \quad R_4(x) = \frac{\sin(\xi)}{24}\,x^4$$
für ein χ zwischen 0 und x, und
$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_3(x) \quad \text{mit} \quad R_3(x) = \frac{\sin(\eta)}{6}\,x^3$$
für ein η zwischen 0 und x Also gilt:
$$\frac{x - \sin(x)}{x(1-\cos(x))} = \frac{\frac{1}{6}x^3 - \frac{\sin(\xi)}{24}x^4}{x(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\sin(\eta)}{6}x^3)} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{\sin(\xi)}{24}x}{\frac{1}{2} - \frac{\sin(\eta)}{6}x} \to \frac{1}{3}$$
für $x \to 0$.

13.7. Definition. Sei I ein offenes Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sie heißt *reell-analytisch*, wenn es zu jedem $a \in I$ ein $r > 0$ und $c_0, c_1, \dots \in \mathbb{R}$ gibt mit $(a - r, a + r) \subseteq I$ und
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \text{für alle } x \in (a-r, a+r).$$
In diesem Fall bezeichnet man die Reihe als *Taylorreihe* von f im Punkt a.

13.8. Bemerkung. Jede reell-analytische Funktion ist der Klasse C^∞. Es gibt aber Funktionen der Klasse C^∞, die nicht reell-analytisch sind. Ein Beispiel ist:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x}), & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leqslant 0. \end{cases}$$

13.9. Satz. Für $x \in (-1, 1)$ gilt
$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

13.10. Satz. Für $x \in (-1, 1)$ gilt
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

13.11. Bemerkung. Man kann zeigen, dass die Reihe auch für $x = \pm 1$ gegen $\arctan(x)$ konvergiert. Insbesondere gilt
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$
Man kann auch $\frac{\pi}{6}$ als Reihe ausdrücken.