Analysis II

Vorlesung im Sommersemester 2019

Das Kurzskript basiert auf dem Skript von Prof. Rüdiger W. Braun

12. Juli 2019

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Differentialrechnung mehrer Veränderlicher

1. Normierte Räume

1.1 Definition. Sei $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Die *euklidische Norm* von x ist definiert als

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

1.2 Definition. Ein (reeller) *normierter Raum* besteht aus einem Vektorraum V und einer Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, welche man als *Norm* bezeichnet, so dass gilt

(a) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$,

(b) $\|v\| = 0$ dann und nur dann, wenn $v = 0$,

(c) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in V$,

(d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$ (Dreiecksungleichung).

Jetzt würde man gerne beweisen, dass die euklidische Norm ihren Namen zu Recht trägt. Dazu benötigen wir

1.3 Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung). *Sind $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ im $\mathbb{R}^n$, so ist*

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

1.4 Satz. *Die euklidische Norm ist in der Tat eine Norm.*

1.5 Beispiel. Zwei andere gebräuchliche Normen sind:

(a) $\|v\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$,

(b) $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}$.

1.6 Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es $a, b > 0$ gibt, so dass

$$a\|v\| \leq |||v||| \leq b\|v\| \quad \text{für alle } v \in V.$$

1.7 Beispiel. Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ äquivalent.

Genauer gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n$

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq \sqrt{n}\|v\|_2 \leq n\|v\|_\infty.$$

Wir werden später den Satz beweisen, dass je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.

2. Metrische Räume

In der Analysis II bewegen wir uns im $\mathbb{R}^n$. Für einige Grundbegriffe wie z. B. Stetigkeit ist die Vektorraumstruktur aber nicht notwendig.

2.1 Definition. Ein *metrischer Raum* besteht aus einer Menge X und einer Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, genannt *Metrik*, mit den folgenden Eigenschaften

(a) $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$,

(b) $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$,

(c) $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$,

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

2.2 Beispiel. Jeder normierte Raum wird durch die Setzung $d(x, y) = \|x - y\|$ zu einem metrischen Raum.

2.3 Beispiel. Wenn X ein metrischer Raum und Y eine Teilmenge von X ist, so wird auch Y zu einem metrischen Raum, indem man die Metrik $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ auf $Y \times Y$ einschränkt.

2.4 Beispiel. Auf jeder beliebigen Menge X gibt es die folgende, ganz langweilige Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie heißt *diskrete Metrik.*

2.5 Definition. Sei X ein metrischer Raum mit Metrik d. Für $a \in X$ und $r > 0$ definieren wir die *offene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r als

$$B_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$$

Die *abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius r wird definiert durch

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}.$$

2.6 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $G \subset X$ heißt *offen* in X, wenn zu jedem $x \in G$ ein $r > 0$ existiert, so dass $B_r(x) \subset G$.

2.7 Beispiel. $X = \mathbb{R}$ mit der Metrik $d(x, y) = |x-y|$. Dann sind alle offenen Intervalle offen im Sinne obiger Definition.

2.8 Satz. *Jede offene Kugel in einem metrischen Raum X ist offen in X.*

2.9 Satz. *Sei X ein metrischer Raum. Dann gelten*

(a) X und $\emptyset$ sind offen in X.

(b) Ist I irgendeine Menge und ist für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge $A_i \subset X$ gegeben, dann ist $\bigcup_{i \in I} A_i$ offen in X.

(c) Sind $A_1, \ldots, A_n$ endlich viele offene Mengen in X, so ist $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ offen in X.

2.10 Beispiel. $I = \mathbb{N}$ und $A_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Dann ist jedes A_n offen, aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$ nicht.

2.11 Definition. Sei X ein metrischer Raum und sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von x, wenn es eine offene Teilmenge $A \subset X$ gibt mit $x \in A \subset U$.

2.12 Bemerkung. Eigenschaften von Umgebungen:

(a) Für $x \in X$ und $U \subset X$ sind äquivalent
   (i) U ist Umgebung von x.
   (ii) Es gibt ein $r > 0$ mit $B_r(x) \subset U$.

(b) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung aller ihrer Punkte ist.

(c) Jede Obermenge einer Umgebung von x ist wieder Umgebung von x.

(d) Der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen von x ist wieder eine Umgebung von x.

2.13 Definition. Es sei X ein metrischer Raum, es sei $x \in X$, und es sei $A \subset X$.
x heißt *Berührpunkt* von A, falls in jeder Umgebung von x ein Punkt von A liegt.
x heißt *Häufungspunkt* von A, falls in jeder Umgebung von x ein von x verschiedener Punkt von A liegt.

2.14 Beispiel. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Berührpunkt von $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, wenn $x \in A$ oder $x = 0$, aber nur 0 ist ein Häufungspunkt von A.

2.15 Bemerkung. x ist genau dann ein Berührpunkt von A, wenn $x \in A$ oder x Häufungspunkt von A ist.

2.16 Satz. *Sei X ein metrischer Raum und sei $A \subset X$. Dann sind äquivalent:*

(a) A enthält alle Berührpunkte von A.

(b) A enthält alle Häufungspunkte von A.

(c) $X \setminus A$ ist offen in X.

2.17 Definition. Wenn eine Teilmenge A eines metrischen Raums X die äquivalenten Eigenschaften aus Satz 2.16 besitzt, dann sagt man, A sei *abgeschlossen* in X.

2.18 Beispiel. Abgeschlossene Intervalle sind abgeschlossen im Sinne dieser Definition.

2.19 Satz (De Morgansche Regeln).

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i), \quad X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

2.20 Satz. *Sei X ein metrischer Raum. Dann gelten*

(a) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(b) Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

(c) Die Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.

2.21 Beispiel. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (-1, 1)$ ist eine Menge, die nicht abgeschlossen, aber Vereinigung von abgeschlossenen Mengen ist.

2.22 Satz. *Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine endliche Teilmenge. Dann ist A abgeschlossen.*

2.23 Definition. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X, und sei $y \in X$. Der Punkt y heißt *Grenzwert* der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(x_n, y) < \epsilon$ für alle $n \geq N$.

Man schreibt dann $\lim_{n \to \infty} x_n = y$ oder $x_n \to y$.

2.24 Bemerkung. Es sind äquivalent

(a) $\lim_{n \to \infty} x_n = y$.

(b) Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in B_\epsilon(y)$ für alle $n \geq N$.

(c) Zu jeder Umgebung U von y existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

2.25 Satz. *Keine Folge in einem metrischen Raum besitzt mehr als einen Grenzwert.*

2.26 Bemerkung. Sei X ein metrischer Raum, sei $A \subset X$ und $x \in X$.

(a) x ist Berührpunkt von A genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(b) A ist genau dann abgeschlossen, wenn gilt: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, die einen Grenzwert in X besitzt, so liegt dieser Grenzwert bereits in A.

2.27 Definition. Zwei Metriken d_1 und d_2 auf X heißen *äquivalent,* wenn es $0 < a < b$ gibt, so dass

$$ad_1(x,y) \le d_2(x,y) \le bd_1(x,y) \qquad \text{für alle } x,y \in X.$$

2.28 Bemerkung. (a) Wenn $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ äquivalente Normen auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V sind, dann sind die zugehörigen Metriken $d_1(x,y) = \|x-y\|$ und $d_2(x,y) = |||x-y|||$ ebenfalls äquivalent.

(b) Äquivalente Metriken besitzen dieselben Umgebungen, dieselben Berühr- und Häufungspunkte, sowie dieselben offenen bzw. abgeschlossenen Mengen.

(c) Seien d_1 und d_2 äquivalente Metriken auf X. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X besitzt genau dann den Grenzwert y bzgl. d_1, wenn sie bzgl. d_2 gegen y konvergiert.

2.29 Satz. *Sei* $X = \mathbb{R}^n$ *mit einer der Normen* $\|\cdot\|_p$, $p = 1,2,\infty$. *Sei* $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge im* $\mathbb{R}^n$ *mit* $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, *und sei* $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. *Dann gilt* $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ *genau dann, wenn für jedes* $j \in \{1,\dots,n\}$ *gilt* $\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^{(0)}$.

Man sagt: Eine Folge konvergiert genau dann im $\mathbb{R}^n$, wenn sie komponentenweise konvergiert.

2.30 Definition. Sei X ein metrischer Raum, sei $A \subset X$ und $x \in X$. Man bezeichnet x als *inneren Punkt* von A, wenn A Umgebung von x ist. Die Menge aller inneren Punkte von A bezeichnet man als das *Innere* von A; man schreibt dafür $\mathring{A}$.

2.31 Satz. $\mathring{A}$ *ist die größte offene Teilmenge von* X, *die in* A *enthalten ist.*

2.32 Beispiel. In $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\|\cdot\|_p$, $p = 1,2,\infty$, sei $A = \overline{B}_r(a)$. Dann gilt $\mathring{A} = B_r(a)$.

2.33 Definition. Sei X ein metrischer Raum, sei $A \subset X$. Die Menge aller Berührpunkte von A heißt *Abschluss* von A, i. Z. $\overline{A}$.

2.34 Beispiel. In $X = \mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\|\cdot\|_p$, $p = 1,2,\infty$, gilt $\overline{B_r(a)} = \overline{B}_r(a)$.

2.35 Bemerkung. (a) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

(b) $\overline{A}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die A umfasst.

2.36 Definition. Sei X ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$. x heißt *Randpunkt* von A, wenn x Berührpunkt von A und von $X \setminus A$ ist. Die Menge aller Randpunkte ist der *Rand* von A, man schreibt dafür ∂A.

2.37 Bemerkung. (a) ∂A ist abgeschlossen in X.

(b) X ist disjunkte Vereinigung von $\mathring{A}$, ∂A und $(X \setminus A)^\circ$.

2.38 Beispiel. In $\mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\|\cdot\|_j$, $j = 1, 2, \infty$, gilt

$$\partial B_r(a) = \partial \overline{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_j = r\}.$$

3. Stetige Abbildungen

3.1 Definition. Seien (X, d_1) und (Y, d_2) metrische Räume, sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung, und sei $x_0 \in X$. f heißt stetig im Punkt x_0, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes $x \in X$ mit $d_1(x, x_0) < \delta$ gilt $d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

Eine Abbildung f heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

3.2 Bemerkung. f ist genau dann stetig in x_0, wenn es zu jeder Umgebung U von $f(x_0)$ eine Umgebung V von x_0 gibt mit $f(V) \subset U$.

3.3 Beispiel. (a) Alle konstanten Abbildungen sind stetig.

(b) Seien X, Y und Z metrische Räume, $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen und sei $x_0 \in X$. Falls f stetig in x_0 und g stetig in $f(x_0)$ ist, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.

3.4 Satz. *Seien X und Y metrische Räume, sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(a) f ist stetig.

(b) Für jede offene Menge $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ offen in X.

(c) Für jede abgeschlossene Menge $B \subset Y$ ist $f^{-1}(B)$ abgeschlossen in X.

(d) Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big).$$

3.5 Korollar. *Seien X, Y metrische Räume und seien $f, g\colon X \to Y$ stetig. Dann ist $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X.*

3.6 Korollar. *Sei X ein metrischer Raum und seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\{x \mid f(x) < g(x)\}$ offen in X.*

3.7 Korollar. *Sei X ein metrischer Raum, sei $x_0 \in X$, und seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig in x_0. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, $f - g$ und $f \cdot g$ stetig in x_0. Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung U von x_0, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, und die Funktion $f/g\colon U \to \mathbb{R}$ ist stetig in x_0.*

3.8 Satz. *Sei X ein metrischer Raum und sei $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Wir schreiben $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ mit Abbildungen $f_j\colon X \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. Wir versehen $\mathbb{R}^n$ mit einer der Normen $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$. Dann ist f genau dann stetig, wenn alle f_j stetig sind.*

4. Kompakte Mengen und stetige Abbildungen

Ziel in diesem Abschnitt ist die Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

4.1 Definition. Eine Teilmenge A eines metrischen Raums X heißt *kompakt*, wenn jede Folge in A eine konvergente Teilfolge hat, deren Genzwert in A liegt.

4.2 Bemerkung. (a) Alle Intervalle der Form $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ sind kompakt. (Das ist der Satz von Bolzano-Weierstraß.)

(b) Wenn A kompakt ist, dann liegen alle Berührpunkte von A in A. Kompakte Teilmengen sind daher abgeschlossen.

4.3 Definition. Sei V ein normierter Raum. Eine Teilmenge A von V heißt *beschränkt*, wenn es ein $C > 0$ gibt, so dass $\|x\| \leq C$ für alle $x \in A$.

4.4 Lemma. *Sei A eine kompakte Teilmenge eines normierten Raums V. Dann ist A beschränkt.*

4.5 Satz (Heine-Borel[1]). *Der $\mathbb{R}^n$ sei mit einer der Normen $\|\cdot\|_p$, $p = 1, 2, \infty$, versehen. Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

4.6 Satz. *Seien X, Y metrische Räume, sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, und sei $A \subset X$ kompakt. Dann ist $f(A)$ ebenfalls kompakt.*

Prägnante Formulierung: "Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt."

4.7 Korollar. *Sei A eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, und sei $f\colon A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf A ihr Maximum und ihr Minimum an.*

4.8 Satz. *Es seien $(V, \|\cdot\|)$ und $(W, \|\cdot\|)$ normierte Räume, und es sei $\dim V < \infty$. Ferner sei $A\colon V \to W$ linear. Dann gibt es ein $L > 0$, so dass*

$$\|Av\| \leq L\|v\| \quad \textit{für alle } v \in V,$$

und A ist stetig.

4.9 Korollar. *Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.*

[1] Eduard Heine, nicht mit der HHU verwandt

5. Partielle Ableitungen

5.1 Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$, und es sei $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in U$. Für $i = 1, \ldots, n$ setzen wir $U_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in U\}$. Dann ist U_i eine offene Umgebung von x_i in $\mathbb{R}$. Man definiert $F_i\colon U_i \to \mathbb{R}$ durch

$$F_i(t) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Wenn für jedes $i = 1, \ldots n$ die Funktion F_i in x_i differenzierbar ist, dann heißt f *partiell differenzierbar* in x. Man schreibt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = F_i'(x_i).$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ heißt dann i-*te partielle Ableitung* von f in x. Die Funktion f heißt *partiell differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt von U partiell differenzierbar ist.

5.2 Bemerkung. (a) Man berechnet die i-te partielle Ableitung, indem man f als Funktion von x_i allein auffasst und die anderen Variablen als konstant ansieht.

(b) Für $n = 2$ schreibt man of (x, y) anstelle von (x_1, x_2). Dann schreibt man entsprechend $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

5.3 Beispiel. (a) $f(x, y) = e^{xy^2}$. Dann $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xye^{xy^2}$.

(b) Betrachte

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f ist überall partiell differenzierbar, obwohl sie in $(0, 0)$ unstetig ist. Den Graphen von f zeigen die Abbildungen 5.1 und 5.2.

5.4 Definition. Sei U offen in $\mathbb{R}^n$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, wieder partiell differenzierbar sind, dann heißt f *zweimal partiell differenzierbar.* Man schreibt dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Induktiv definiert man so für jedes $k \in \mathbb{N}$ die k-fachen partiellen Ableitungen.

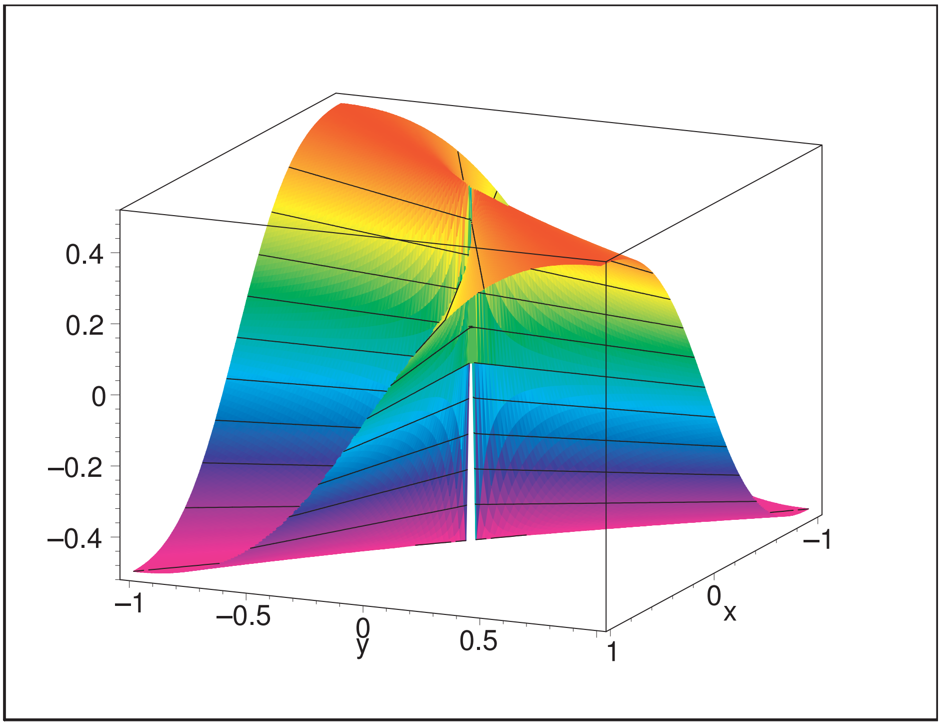

Abbildung 5.1.: Graph der Funktion aus Beispiel 5.3

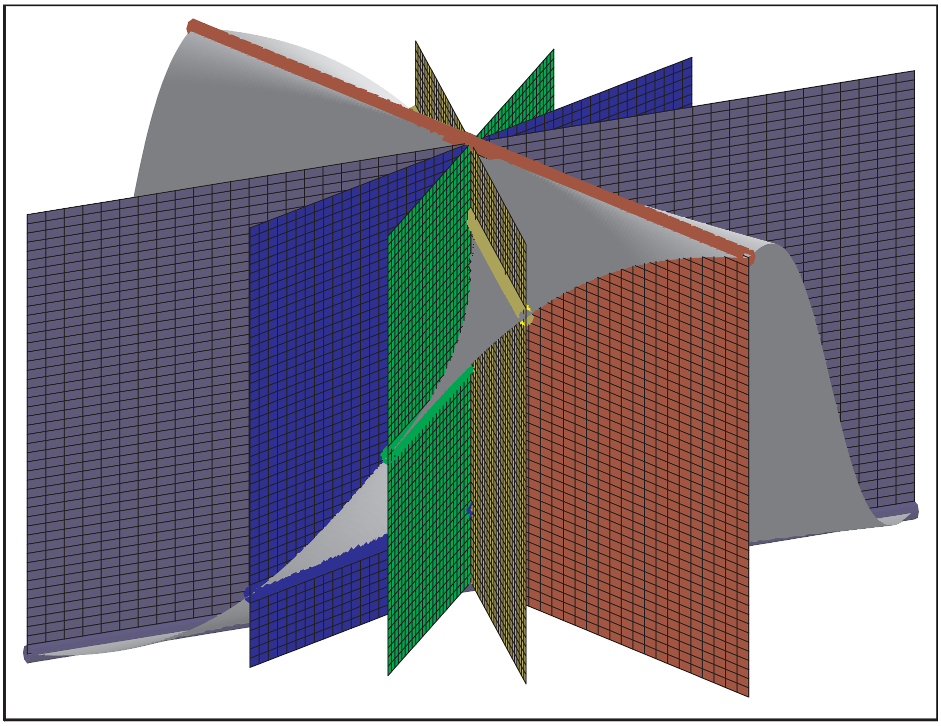

Abbildung 5.2.: Graph der Funktion aus Beispiel mit Geraden konstanter Funktionswerte

Wenn f k-mal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig sind, dann sagt man, f sei von der Klasse C^k. Beachte, dass dabei die Stetigkeit der Ableitung 0-ter Ordnung, also von f selbst, gefordert wird. Wenn f für jedes $k \in \mathbb{N}$ von der Klasse C^k ist, so heißt f *glatt* oder von der Klasse C^∞. Schließlich heißt f von der Ordnung C^0, wenn es stetig ist.

5.5 Bezeichnung. Statt $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}$ wird auch $D_i f$ geschrieben. Also beispielsweise

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2^2} = D_1 D_2^2 f.$$

5.6 Definition. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, so erhält definiert man

$$\nabla f\colon U \to \mathbb{R}^n, \quad \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

∇f ist der *Gradient* von f. Das Zeichen ∇ wird als "Nabla" ausgesprochen.

5.7 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt f *partiell differenzierbar* (bzw. von der Klasse C^k), wenn alle f_j partiell differenzierbar (bzw. von der Klasse C^k) sind. Für $x \in U$ ist

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

als *Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix* von f an der Stelle x.

Wenn Funktionalmatrizen vorkommen, schreiben wir Vektoren als Spalten.

6. C^1-Abbildungen

6.1 Satz. *Sei* U *offen in* $\mathbb{R}^n$ *und* $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)\colon U \to \mathbb{R}^m$ *eine partiell differenzierbare Abbildung, so dass alle Funktionen* $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\colon U \to \mathbb{R}$ *stetig sind. Sei* $x \in U$ *fest. Für jedes* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *mit* $x + \xi \in U$ *definiere* $\varphi(\xi) \in \mathbb{R}^m$ *durch*

$$f(x + \xi) - f(x) = Df(x) \cdot \xi + \varphi(\xi). \tag{6.1}$$

Dann gilt

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0.$$

6.2 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ heißt *(total) differenzierbar* in $x \in U$, wenn f in x partiell differenzierbar ist und für die Abbildung φ aus (6.1) gilt

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0.$$

6.3 Korollar. C^1*-Abbildungen sind differenzierbar.*

6.4 Beispiel. Die Umkehrung gilt nicht. Wir hatten bereits in der Analysis I gesehen, dass die Abbildung

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

zwar differenzierbar ist, die Ableitung aber unstetig in 0 ist.

6.5 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ *eine Abbildung, und sei* $x \in U$. *Wenn* f *in* x *differenzierbar ist, dann ist* f *stetig in* x.

6.6 Beispiel. Sei A eine reelle $m \times n$-Matrix. Definiere $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ durch $f(x) = A \cdot x$. Dann ist f differenzierbar, und für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $Df(x) = A$.

f ist sogar von der Klasse C^∞. Alle höheren partiellen Ableitungen von f sind 0.

6.7 Satz. *Sei* U *offen in* $\mathbb{R}^n$, $x \in U$ *und* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. *Wenn es eine* $m \times n$*-Matrix* A *gibt, so dass für*

$$\varphi(\xi) = f(x + \xi) - f(x) - A \cdot \xi$$

gilt

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{\|\varphi(\xi)\|}{\|\xi\|} = 0,$$

dann ist f *in* x *differenzierbar und* $A = Df(x)$.

6.8 Satz (Kettenregel). *Seien* $U \subset \mathbb{R}^n$ *und* $V \subset \mathbb{R}^m$ *offen. Seien* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ *und* $g\colon V \to \mathbb{R}^p$ *von der Klasse* C^k*, und sei* $f(U) \subset V$*. Dann ist die Abbildung* $g \circ f$ *von der Klasse* C^k*, und es gilt*

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x) \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Das gilt auch für $k = \infty$*.*

6.9 Beispiel. Für $p = 1$, also $g \circ f\colon U \to \mathbb{R}$, erhält man

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

6.10 Notation. Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir das *Skalarprodukt* wie folgt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

6.11 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sei $x \in U$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $U_v = \{t \in \mathbb{R} \mid x + tv \in U\}$ eine offene Umgebung der 0 in $\mathbb{R}$. Definiere $F_v\colon U_v \to \mathbb{R}$ durch $F_v(t) = f(x + tv)$. Wenn F_v in 0 differenzierbar ist, dann bezeichnet man $F_v'(0)$ als *Richtungsableitung* von f an der Stelle x in Richtung v. Wir schreiben $D_v f(x)$ oder $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ dafür.

6.12 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *von der Klasse* C^1*, sei* $x \in U$ *und sei* $v \in \mathbb{R}^n$*. Dann existiert die Richtungsableitung* $D_v f(x)$ *und es gilt*

$$D_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle .$$

Wenn der Gradient nicht verschwindet, dann gibt er die Richtung des stärksten Anstiegs an. In diesem Fall ist die Richtung des stärksten Anstiegs senkrecht zu den Höhenlinien.

7. Die Hesse-Matrix

7.1 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Die Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

heißt *Hesse-Matrix* von f an der Stelle x.

7.2 Satz (H. A. Schwarz). *Wenn* f *von der Klasse* C^2 *ist, dann ist* $H_f(x)$ *für jedes* $x \in U$ *symmetrisch, d. h.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

7.3 Beispiel. Für $f(x, y, z) = xz + e^{x+2y}$ gilt

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y} & 1 \\ 2e^{x+2y} & 4e^{x+2y} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.4 Korollar. *Wenn* f *von der Klasse* C^k *ist, dann kommt es bei den Ableitungen von der Ordnung* $\leq k$ *nicht auf die Reihenfolge an.*

8. Mittelwertsatz und Taylor-Formel

Ich schreibe die Funktionalmatrix jetzt immer mit Klammern, also $D(f)(x)$ für die Funktionalmatrix von f an der Stelle x.

Der Mittelwertsatz der Analysis I lautet: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b), dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

In dieser Form kann der Mittelwertsatz nicht auf mehrere Veränderliche verallgemeinert werden.

8.1 Beispiel. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $f(x) = \left(\begin{smallmatrix}\cos x\\ \sin x\end{smallmatrix}\right)$. Dann $f(0) = f(2\pi)$, aber es gibt kein ξ mit $D(f)(\xi) = \left(\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right)$.

8.2 Lemma. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1. Sei $A \subset U$ beschränkt und abgeschlossen. Dann existiert $M \geq 0$, so dass $\|D(f)(x) \cdot v\| \leq M\|v\|$ für alle $x \in A$ und $v \in \mathbb{R}^n$.*

Der Wert von M hängt von den gewählten Normen auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ ab.

8.3 Theorem (Mittelwertsatz). *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ von der Klasse C^1. Seien $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Strecke $A = \{x + t\xi \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ganz in U liegt. Wähle M so, dass $\|D(f)(y) \cdot v\| \leq M\|v\|$ für alle $y \in A$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\|f(x+\xi) - f(x)\| \leq M\|\xi\|.$$

8.4 Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben als

$$f\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 e^{x_2}\\ e^{-x_1x_2}\end{pmatrix}.$$

Für alle $h \in [-1,1]$ wollen wir $\left\|f\left(\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix}1+h\\ 1+h\end{smallmatrix}\right)\right\|_\infty$ abschätzen. Wir setzen dazu $A = \{\left(\begin{smallmatrix}t\\ t\end{smallmatrix}\right) \mid 0 \leq t \leq 2\}$ und berechnen die Funktionalmatrix

$$D(f)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{x_2} & x_1e^{x_2}\\ -x_2e^{x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2}\end{pmatrix}.$$

Für $v = (v_1, v_2)$ mit $\|v\|_\infty = 1$ gilt

$$\begin{aligned}\left\|D(f)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \cdot v\right\|_\infty &= \left\|\begin{pmatrix}v_1e^{x_2} + v_2x_1e^{x_2}\\ -v_1x_2e^{-x_1x_2} - v_2x_1e^{-x_1x_2}\end{pmatrix}\right\|_\infty\\ &\leq \max\left(e^{x_2} + |x_1|e^{x_2}, |x_2|e^{-x_1x_2} + |x_1|e^{-x_1x_2}\right) \leq \max\left(e^2 + 2e^2, 2e^0 + 2e^0\right) = 3e^2.\end{aligned}$$

Wir haben gezeigt

$$\left\| f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}1+h\\1+h\end{pmatrix} \right\|_\infty \leq 3e^2|h| \qquad \text{für } -1 \leq h \leq 1.$$

8.5 Satz. $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen sei so, dass je zwei Punkte in* U *durch einen Streckenzug verbunden werden können, der komplett in* U *verläuft. Sei* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ *partiell differenzierbar mit* $D(f)(x) = 0$ *für alle* $x \in U$*. Dann ist* f *konstant.*

Da es wegen des Satzes von Schwarz bei C^k-Abbildungen auf die Differentiationsreihenfolge nicht ankommt, ist die folgende Schreibweise sinnvoll:

8.6 Notation. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(a) Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ setzen wir

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$
$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_n!.$$

Ein n-Tupel mit dieser Interpretation heißt *Multiindex.*

(b) Für einen Multiindex α und f von der Klasse $C^{|\alpha|}$ setzen wir

$$D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dabei gilt die Vereinbarung $D_i^0 f = f$.

(c) Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.

8.7 Theorem (Taylor-Formel). *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *von der Klasse* C^{k+1}*. Seien* $x, \xi \in \mathbb{R}^n$*, so dass die Strecke zwischen* x *und* $x + \xi$ *(inklusive der Endpunkte) in* U *liegt. Dann*

$$f(x+\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + (k+1) \sum_{|\alpha| = k+1} \int_0^1 (1-t)^k \frac{D^\alpha f(x + t\xi)}{\alpha!} \xi^\alpha dt.$$

8.8 Korollar. *Sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *von der Klasse* C^3*, sei* $x \in U$ *und sei* $\overline{B}_r(x) \subset U$*, wobei die Kugel* $\overline{B}_r(x)$ *bezüglich einer beliebigen Norm* $\|\cdot\|$ *gebildet wird. Dann gibt es* $M \geq 0$*, so dass für alle* ξ *mit* $\|\xi\| < r$ *gilt*

$$f(x+\xi) = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(x) \cdot \xi, \xi \rangle + R_3(\xi),$$

wobei $|R_3(\xi)| \leq M\|\xi\|^3$.

9. Extremwerte und kritische Stellen

9.1 Definition. Sei X ein metrischer Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in X$. f besitzt in x_0 ein *lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

f besitzt in x_0 ein *striktes lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{für alle } x \in U \setminus \{x_0\}.$$

Entsprechend definiert man (strikte) lokale Minima. f besitzt in x_0 ein (striktes) lokales Extremum, wenn f in x_0 ein (striktes) lokales Maximum oder ein (striktes) lokales Minimum besitzt.

9.2 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Wenn f in x ein lokales Extremum besitzt, dann*

$$\nabla f(x) = 0.$$

9.3 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Wenn $\nabla f(x) = 0$, so heißt x *kritische Stelle* von f.

Kritische Stellen sind Kandidaten für Extremalstellen. Zur genaueren Untersuchung kann man die Hesse-Matrix heranziehen. Dazu wiederhole ich einige Begriffe aus der linearen Algebra.

9.4 Definition. Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix.

(a) A heißt *positiv definit*, wenn $\langle x, Ax\rangle > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) A heißt *negativ definit*, wenn $\langle x, Ax\rangle < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(c) A heißt *positiv semidefinit*, wenn $\langle x, Ax\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(d) A heißt *negativ semidefinit*, wenn $\langle x, Ax\rangle \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(e) A heißt *indefinit*, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle x, Ax\rangle > 0$ und ein $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle y, Ay\rangle < 0$ gibt.

9.5 Lemma. *Sei A eine reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix.*

(a) *A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind (also echt größer als 0).*

(b) *A ist genau dann positiv semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A positiv oder 0 sind.*

(c) *A ist genau dann negativ definit, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.*

(d) *A ist genau dann negativ semidefinit, wenn alle Eigenwerte von A negativ oder 0 sind.*

(e) *A ist genau dann indefinit, wenn A sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt.*

9.6 Satz (Hurwitz-Kriterium). *Sei $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ eine reelle, symmetrische $n\times n$-Matrix. Setze*

$$\Delta_k = \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}.$$

(a) *A ist genau dann positiv definit, wenn $\Delta_k > 0$ für alle k.*

(b) *A ist genau dann negativ definit, wenn $(-1)^k\Delta_k > 0$ für alle k.*

(c) *Wenn es ein k mit $\Delta_{2k} < 0$ gibt, dann ist A indefinit.*

Beweis. Den wichtigen Spezialfall $n = 2$ machen wir als Übung. Den allgemeinen Beweis findet man beispielsweise als Satz 20.12 im Buch von Kaballo. Forster zitiert Abschnitt 6.7.9 des Buches “Lineare Algebra” von Fischer. □

Man versteht die Bedingungen am besten durch Betrachtung des Spezialfalls von Diagonalmatrizen.

9.7 Beispiel. Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Für A gelten $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = 1$ und $\Delta_3 = \det(A) = a + 2$. Also ist A negativ definit für $a < -2$. In allen anderen Fällen sagt das Hurwitz-Kriterium nichts aus.

Für B gilt $\Delta_2 = -2$. Daher ist B indefinit.

9.8 Satz. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ von der Klasse C^3. Sei x eine kritische Stelle von f.*

(a) *Ist $H_f(x)$ positiv definit, so besitzt f in x ein striktes lokales Minimum.*

(b) *Ist* $H_f(x)$ *negativ definit, so besitzt* f *in* x *ein striktes lokales Maximum.*

(c) *Ist* $H_f(x)$ *indefinit, so besitzt* f *in* x *kein lokales Extremum.*

9.9 Bemerkung. (a) Wenn in einem kritischen Punkt kein Extremum vorliegt, so spricht man von einem *Sattelpunkt* von f.

(b) Obiger Satz gilt auch dann noch, wenn f nur von der Klasse C^2 ist. Details findet man in den angegebenen Büchern.

9.10 Beispiel. (a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$. Dann ist $(0,0)$ der einzige kritische Punkt. Dort ist H_f indefinit. Also besitzt f in $(0,0)$ einen Sattel.

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Dann gibt es zwei kritische Punkte, nämlich $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (1,1)$. In $(0,0)$ ist die Hessesche indefinit, es liegt also ein Sattel vor. In $(1,1)$ ist die Hessesche positiv definit, es liegt also ein striktes lokales Minimum vor.

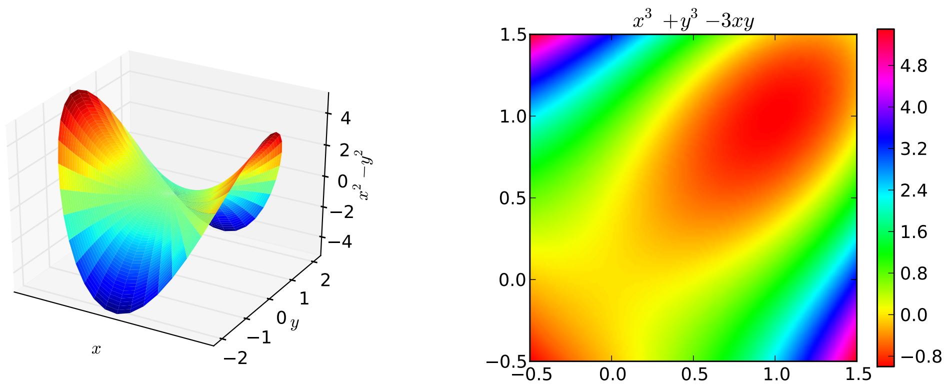

Abbildung 9.1.: Graphen zu Beispiel 9.10

10. Die Weglänge

10.1 Definition. Ein *stetiger Weg* ist eine stetige Abbildung $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Der Weg heißt *geschlossen*, wenn $\alpha(a) = \alpha(b)$.

Die Bildmenge $\{\alpha(t) \mid a \leq t \leq b\}$ ist die *Spur* des Weges α.

10.2 Definition. Eine *Zerlegung* von $[a,b]$ ist ein $(m+1)$-Tupel $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b.$$

10.3 Definition. $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn es ein offenes Intervall I mit $[a,b] \subset I$ gibt, so dass sich α zu einer Abbildung der Klasse C^1 von I nach $\mathbb{R}^n$ fortsetzen lässt.

α heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es eine Zerlegung $(t_0, t_1, \dots, t_m)$ von $[a,b]$ gibt, so dass die Einschränkungen $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ für $i = 1, \dots, m$ stetig differenzierbar sind.

10.4 Definition. Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetiger Weg. Mit $\mathcal{Z}$ bezeichnen wir die Menge aller Zerlegungen von $[a,b]$. Ist $Z = (t_0, t_1, \dots, t_m) \in \mathcal{Z}$, sei sei

$$L(\alpha, Z) = \sum_{i=1}^{m} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|_2.$$

α heißt *rektifizierbar*, wenn die Menge $\{L(\alpha, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ beschränkt ist. In diesem Fall ist

$$L(\alpha) = \sup\{L(\alpha, Z) \mid Z \in \mathcal{Z}\}$$

die *Länge* von α.

10.5 Definition. Sei $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Die *Weglängenfunktion* ist definiert als

$$s(t) = L(\alpha|_{[a,t]}).$$

10.6 Bemerkung. Sei $Z = (t_0, t_1, \dots, t_m) \in \mathcal{Z}$. Ein Weg $\alpha\colon [t_0, t_m] \to \mathbb{R}$ ist genau dann rektifizierbar, wenn für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ die Einschränkung $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ rektifizierbar ist. In diesem Fall gilt

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} L\left(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}\right).$$

Insbesondere gilt für $a < t_1 < t_2 < b$

$$s(t) = s(t_1) + L(\alpha|_{[t_1, t]}).$$

10.7 Satz. *Ist α stetig differenzierbar, so ist α rektifizierbar, die Weglängenfunktion ist stetig differenzierbar mit $s'(t) = \|\alpha'(t)\|_2$ und*

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_2 dt.$$

10.8 Korollar. *Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg ist rektifizierbar.*

10.9 Beispiel. (a) In der Antike wurde π erklärt als halbe Länge des Einheitskreises. Die folgende Rechnung zeigt, dass diese Definition mit der modernen übereinstimmt.

Der Weg $\alpha\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2}$, beschreibt einen Halbkreis vom Radius 1. Dann

$$\alpha'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right).$$

Also

$$\|\alpha'(t)\|_2 = \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}}$$

und daher

$$L(\alpha) = \int_{-1}^1 \|\alpha'(t)\|_2 dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}} d\varphi = \pi.$$

(b) Für $r, h > 0$ sei der Weg $\alpha\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ th \end{pmatrix}.$$

α beschreibt eine Schraubenlinie. Ihre Länge ist $4\pi\sqrt{r^2+h^2}$.

Teil II.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

11. Allgemeine Theorie und konkrete Beispiele

Wir beginnen mit einem Spezialfall.

11.1 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn für alle $x \in I$ gilt $(x, \varphi(x)) \in U$ und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, so heißt φ Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y). \tag{11.1}$$

Man bezeichnet (11.1) als *explizite Differentialgleichung erster Ordnung*.

Seien zusätzlich noch $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $(x_0, y_0) \in U$ gegeben. Falls $\varphi(x_0) = y_0$, so sagt man, dass φ die *Anfangsbedingung*

$$y(x_0) = y_0$$

erfüllt. Man sagt dann auch, φ sei Lösung der *Anfangswertaufgabe* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

11.2 Beispiel. (a) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $U = J \times \mathbb{R}$. Für eine stetige Funktion $g\colon J \to \mathbb{R}$ definiere $f(x, y) = g(x)$. Das bedeutet, dass die Differentialgleichung $y' = g(x)$ betrachtet wird. Ihre Lösungen sind die Stammfunktionen von g.

(b) Sei $U = \mathbb{R}^2$ und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) = y$. Das bedeutet, dass die Differentialgleichung $y' = y$ betrachtet wird. Ihre Lösungen kennen wir aus der Analysis I.

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist $\varphi_c(x) = ce^x$ eine Lösung, und andere Lösungen gibt es nicht.

Die Graphen von $\varphi_{1/2}$ und $\varphi_{-1/5}$ zusammen mit dem Richtungsfeld der Differentialgleichung zeigt Abbildung 11.1

11.3 Bezeichnung. Das Richtungsfeld einer expliziten Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y)$ mit $f\colon U \to \mathbb{R}$ ist die Abbildung $F\colon U \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (1, f(x, y))$. Man verdeutlicht das Richtungsfeld, indem man an den Punkt (x, y) den Vektor $(x, f(x, y))$ als Pfeil anzeichnet.

Wenn φ eine Lösung der Differentialgleichung ist, dann sind die Pfeile des Richtungsfelds tangential an die Lösungskurve $\{(x, \varphi(x))$.

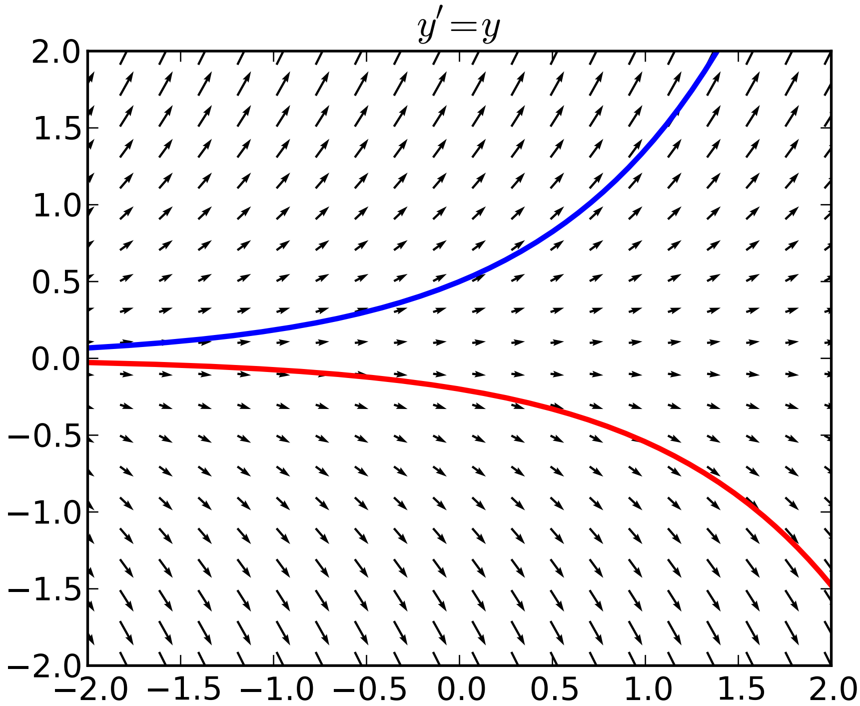

Abbildung 11.1.: Graph und Richtungsfeld zu Beispiel 11.2(b)

11.4 Beispiel. Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $f(x,y) = y^2$, man betrachtet also die Differentialgleichung

$$y' = y^2.$$

Sei φ_0 die Nullfunktion. Für $c \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi_c^-\colon (-\infty, c) &\to \mathbb{R}, & \varphi_c^-(x) &= \frac{1}{c-x} \\ \varphi_c^+\colon (c, \infty) &\to \mathbb{R}, & \varphi_c^+(x) &= \frac{1}{c-x}. \end{aligned}$$

Dann sind die Lösungen φ_0, φ_c^+ und φ_c^- Lösungen von $y' = y^2$.

Die Graphen von φ_{-2}^+, φ_{-2}^-, φ_1^+ und φ_{-}^{1} zusammen mit dem Richtungsfeld der Differentialgleichung zeigt Abbildung 11.2

11.5 Satz (Getrennte Variablen). *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ und $J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ beliebig. Dann existiert ein offenes Intervall $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$, so dass die Anfangswertaufgabe*

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

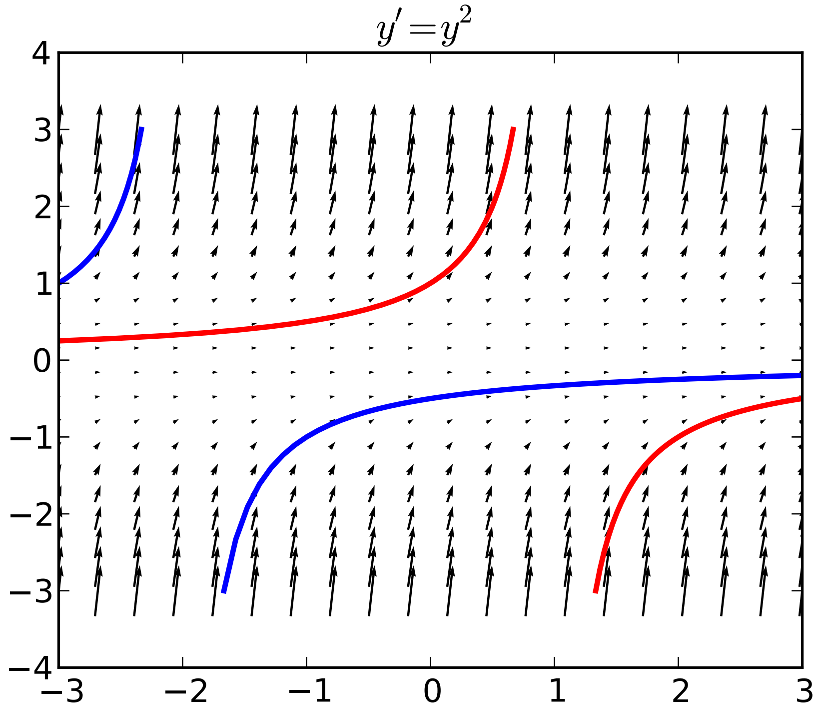

Abbildung 11.2.: Graph und Richtungsfeld zu Beispiel 11.4

genau eine Lösung $\varphi\colon I_0 \to \mathbb{R}$ *besitzt. Diese Lösung ist von der Form* $\varphi(x) = G^{-1}(F(x))$, *wobei*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}.$$

Für I_0 *kann jedes offene Intervall gewählt werden, welches den Bedingungen* $x_0 \in I_0$ *und* $F(I_0) \subset G(J)$ *genügt.*

11.6 Beispiel. Man gebe die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}$$

auf $I \times J = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ an.

Man hat $f(x) = x$ und $g(y) = -\frac{1}{y}$. Dann

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} t\,dt = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$$

und

$$G(y) = -\int_{y_0}^{y} s\,ds = \frac{1}{2}(y_0^2 - y^2).$$

Also $G^{-1}(z) = \sqrt{y_0^2 - 2z}$. Daher ist

$$\varphi(x) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2} \quad \text{die auf } I_0 = \left(-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right)$$

eindeutig bestimmte Lösung. Die Lösungsgesamtheit besteht aus allen Funktionen

$$\varphi_C\colon (-C, C), \quad \varphi_C(x) = \sqrt{C^2 - x^2},$$

für $C > 0$.

Die Graphen von $\varphi_{3/2}$ und φ_1 zusammen mit dem Richtungsfeld der Differentialgleichung zeigt Abbildung 11.3

11.7 Beispiel. Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$. Man betrachtet also die Differentialgleichung

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Wie bei der Substitutionsregel erweist sich die Leibniz-Notation als nützliche Merkhilfe.

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Bringe alle Terme in y auf die linke Seite

$$y^{-2/3}dy = 3dx$$

und bilde Stammfunktionen

$$3y^{1/3} = 3x + C.$$

Löse nach y auf

$$y = (x - c)^3,$$

wobei $c = -C/3$ (aus Bequemlichkeit).

Für $c \in \mathbb{R}$ sei $\varphi_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi_c(x) = (x - c)^3$. Für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b$ setze

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} \varphi_a(x), & \text{für } x \le a, \\ 0, & \text{für } a < x < b, \\ \varphi_b(x), & \text{für } x \ge b. \end{cases}$$

Dann ist $\varphi_{a,b}$ differenzierbar und eine Lösung der Differentialgleichung. Jede Anfangswertaufgabe besitzt also unendlich viele Lösungen.

Die Graphen von $\varphi_{0,0}$ und $\varphi_{-2,1}$ zusammen mit dem Richtungsfeld der Differentialgleichung zeigt Abbildung 11.4

Wir verallgemeinern jetzt Definition 11.1 auf den vektorwertigen Fall.

11.8 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und seien $f_1, \ldots, f_n\colon U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn für alle $x \in I$ sowohl $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \in U$ als auch $\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$

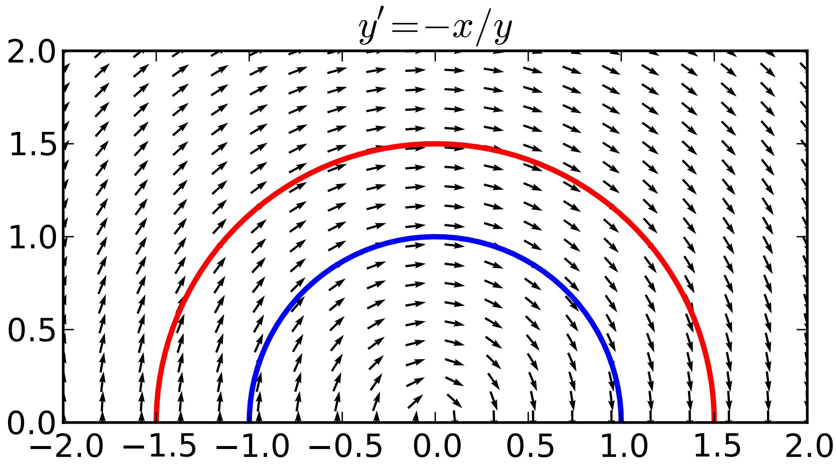

Abbildung 11.3.: Graph zum Beispiel 11.6

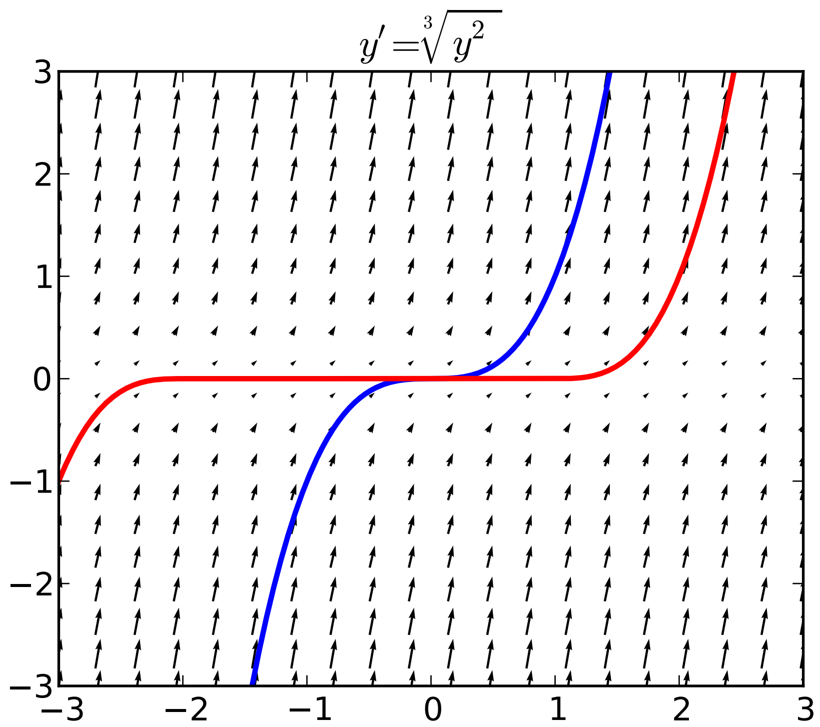

Abbildung 11.4.: Graph und Richtungsfeld zu Beispiel 11.7

für $i = 1, \dots, n$ gelten, dann ist das Tupel $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ eine Lösung der *expliziten Differentialgleichung erster Ordnung.*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \tag{11.2}$$

Dafür schreibt man meist einfacher $y' = f(x, y)$ mit der Interpretation $f = (f_1, \dots, f_n)$ und $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Wenn man $n > 1$ betonen will, dann spricht man auch von einem Differentialgleichungssystem.

11.9 Definition. Seien X und Y metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \geq 0$ gibt mit $d(f(a), f(b)) \leq L d(a, b)$ für alle $a, b \in X$.

(b) f heißt *lokal Lipschitz-stetig* in $x_0 \in X$, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass die Einschränkung $f|_U$ Lipschitz-stetig ist.

11.10 Bemerkung. (a) Lipschitz-stetige Abbildungen sind lokal Lipschitz-stetig und lokal Lipschitz-stetige Abbildungen sind stetig.

(b) C^1-Abbildungen sind lokal Lipschitz-stetig.

(c) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$, ist Lipschitz-stetig. Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{|x|}$, ist in 0 nicht lokal Lipschitz-stetig.

11.11 Definition. Seien X, Y und Z metrische Räume, sei $U \subset X \times Y$, und sei $f\colon U \to Z$ eine Abbildung.

(a) f heißt *Lipschitz-stetig im zweiten Argument*, wenn es ein $L \geq 0$ gibt, so dass

$$d(f(x, y_1), f(x, y_2)) \leq L d(y_1, y_2) \quad \text{für alle } (x, y_1), (x, y_2) \in U.$$

(b) f heißt *lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument*, wenn es zu jedem Paar $(x_0, y_0) \in U$ eine Umgebung V gibt, so dass $f|_V$ Lipschitz-stetig im zweiten Argument ist.

11.12 Bemerkung. Sei $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^k$. Wir schreiben die Elemente von U als $(x, y) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$. Wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$ existieren und stetige Funktionen von (x, y) sind, dann ist f lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument.

11.13 Theorem (Picard-Lindelöf). *Seien* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *stetig (in beiden Argumenten) und lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument, und sei* $(x_0, y_0) \subset U$. *Dann existieren ein offenes Intervall* I *mit* $x_0 \in I$ *und eine Lösung* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ *der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$ *mit folgenden Eigenschaften*

(a) $\varphi(x_0) = y_0$.

(b) Ist $\psi\colon J \to \mathbb{R}^n$ *ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$ *mit* $\psi(x_0) = y_0$, *so gelten* $J \subset I$ *und* $\psi = \varphi|_J$.

Beweis. Dieser Beweis wird auf das Ende der Vorlesung verschoben. □

11.14 Satz (Existenzsatz von Peano). *Sei* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ *stetig, und sei* $(x_0, y_0) \in U$. *Dann existiert eine Lösung* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ *der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$ *mit* $y(x_0) = y_0$.

Den Existenzsatz von Peano werden wir in dieser Vorlesung nicht beweisen. Einen Beweis findet man beispielsweise in dem Buch von Walter.

11.15 Satz (Homogene lineare Differentialgleichung). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall, sei* $a\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig. Sei* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. *Dann existiert genau eine Lösung* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *von* $y' = a(x)y$ *mit* $\varphi(x_0) = y_0$. *Diese Lösung hat die Form*

$$\varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right).$$

11.16 Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x^2}, \quad x \in I = (0, \infty), y \in \mathbb{R}.$$

Dann $a(x) = x^{-2}$. Sei $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist

$$\varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t^2}dt\right) = y_0 \exp\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}\right)$$

die eindeutig bestimmte Lösung der Anfangswertaufgabe $y(x_0) = y_0$.

11.17 Satz (Inhomogene lineare Differentialgleichung, Methode der Variation der Konstanten). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall, seien* $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig. Definiere* $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *durch* $f(x, y) = a(x)y + b(x)$. *Sei* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. *Dann existiert genau eine Lösung* $\psi\colon I \to \mathbb{R}$ *von* $y' = a(x)y + b(x)$ *mit* $\psi(x_0) = y_0$. *Diese Lösung hat die Form*

$$\psi(x) = \varphi(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{\varphi(t)}dt\right),$$

wobei

$$\varphi(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right).$$

11.18 Beispiel. Löse $y' = 1 - y$, $y(x_0) = y_0$. Dann $a(x) = -1$, $b(x) = 1$ und $\varphi(x) = e^{x_0 - x}$. Also

$$\psi(x) = e^{x_0-x}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{1}{e^{x_0-t}}\,dt\right) = e^{x_0-x}\left(y_0 + e^{x-x_0} - 1\right) = y_0 e^{x_0-x} + 1 - e^{x_0-x}.$$

11.19 Definition. Sei $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei I ein offenes Intervall und sei $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Wenn für alle $x \in I$ sowohl $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in U$ als auch $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))$ gelten, dann ist φ eine Lösung der expliziten Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Gelten für φ außerdem noch $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, $\dots$, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ für gegebene Werte $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in U$, so löst φ die Anfangswertaufgabe

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

11.20 Satz. *Für* f *wie oben definiere* $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ *durch*

$$F(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) = (y_1, \dots, y_{n-1}, f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})).$$

Mit $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ *lautet das Differentialgleichungssystem* $Y' = F(x, Y)$ *ausgeschrieben*

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f(x, y_0, \dots, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Daher gelten

(a) Ist φ *eine Lösung von* $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$*, so ist* $\Phi = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ *eine Lösung von* $Y' = F(x, Y)$.

(b) Ist $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ *eine Lösung von* $Y' = F(x, Y)$*, so ist* φ_0 *eine Lösung von* $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.

Diese Technik wird hauptsächlich benutzt, um Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Differentialgleichungen höherer Ordnung auf die entsprechenden Sätze für Differentialgleichungssysteme erster Ordnung zurückzuführen.

11.21 Korollar (Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen höherer Ordnung). *Sei* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen, sei* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *stetig und lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument. Sei* $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in U$. *Dann existiert eine Lösung* $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ *der Differentialgleichung*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit

(a) $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, $\dots$, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

(b) Ist $\psi\colon J \to \mathbb{R}$ *eine Lösung mit* $\psi^{(k)}(x_0) = y_k$ *für* $k = 0, \dots, n-1$, *so ist* $J \subset I$ *und* $\psi = \varphi|_J$.

11.22 Beispiel (Harmonischer Oszillator). : Für $\omega > 0$ betrachte die Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = -\omega^2 y$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Wir haben also $U = \mathbb{R}^3$ und $f(x, y) = -\omega^2 y$. Die Lösung der Anfangswertaufgabe lässt sich sofort erraten: $\varphi(x) = \cos(\omega x)$.

Wir übersetzen die Differentialgleichung wie folgt in ein System erster Ordnung:

Der Vektor im $\mathbb{R}^2$ heißt $Y = \binom{Y_0}{Y_1}$. Die zugehörige Differentialgleichung ist $Y' = F(x, Y)$ mit

$$F(x, Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ -\omega^2 Y_0 \end{pmatrix}.$$

Die Anfangsbedingung ist $Y(0) = \binom{1}{0}$. Die oben angegebene Lösung übersetzt sich zu

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega x) \\ -\omega \sin(\omega x) \end{pmatrix}.$$

12. Lineare Differentialgleichungen

12.1 Definition. Ein *komplexer normierter Raum* besteht aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einer Abbildung $V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$, mit

(a) $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.

(b) $\|v\| = 0$ dann und nur dann, wenn $v = 0$.

(c) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, $v \in V$.

(d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

12.2 Beispiel. Auf $\mathbb{C}^n$ gebräuchliche Normen sind

$$\begin{aligned} \|z\|_1 &= |z_1| + \cdots + |z_n|, \\ \|z\|_2 &= \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}, \\ \|z\|_\infty &= \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}. \end{aligned}$$

Man kann jeden komplexen normierten Raum auch als reellen normierten Raum auffassen. Daher sind je zwei Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ auf dem $\mathbb{C}^n$ äquivalent. Es gibt also $a, b > 0$, so dass

$$a\|z\| \leq |||z||| \leq b\|z\| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n.$$

12.3 Beispiel. Es sei X ein metrischer Raum. Der Raum $C_b(X, \mathbb{C})$ aller beschränkten, stetigen Funktionen $f\colon X \to \mathbb{C}$ ist ein komplexer normierter Raum, wenn man ihn mit der Norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

versieht.

12.4 Definition. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $\mathbb{K}^{m \times n}$ der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{K}$. Wir wählen eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ und eine Norm $|||\cdot|||$ auf $\mathbb{K}^m$. Wegen Satz 4.8 existiert für jedes $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die Zahl

$$\|A\| = \max\{|||Ax||| \mid \|x\| \leq 1\}.$$

Dadurch wird eine Norm auf $\mathbb{K}^{m \times n}$ gegeben. Diese Norm bezeichnet man als *Matrixnorm*.

12.5 Lemma. *Für* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *und* $x \in \mathbb{K}^n$ *gilt* $|||Ax||| \le \|A\|\|x\|$.

Ist ferner noch $B \in \mathbb{K}^{k\times m}$ *gegeben und* $\|\cdot\|$ *eine Norm auf* $\mathbb{K}^k$, *dann gilt* $\|B \cdot A\| \le \|B\|\|A\|$.

12.6 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ und $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ seien stetige Abbildungen. Definiere $f\colon I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ durch $f(x,y) = A(x)\cdot y + b(x)$. Dann bezeichnet man $y' = f(x,y)$ als *lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung.* Ist dabei $b(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist das System *homogen.*

12.7 Satz. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall,* $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ *und* $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ *seien stetige Abbildungen. Sei* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$. *Dann besitzt die Anfangswertaufgabe* $y' = A(x)y + b(x)$, $y(x_0) = y_0$, *eine eindeutig bestimmte Lösung* $\varphi\colon I \to \mathbb{K}^n$.

Beweis. Das ist eine Verschärfung des lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes. Genau wie diesen werden wir sie gegen Ende des Semesters beweisen. □

12.8 Satz. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall und sei* $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ *eine stetige Abbildung. Die Lösungsgesamtheit des homogenen Differentialgleichungssystems* $y' = A(x)y$ *bildet einen Untervektorraum des* $\mathbb{K}$*-Vektorraums aller Abbildungen* $I \to \mathbb{K}^n$.

12.9 Satz. *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall und sei* $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ *eine stetige Abbildung. Sei*

$$L = \{\varphi\colon I \to \mathbb{K}^n \mid \varphi'(x) = A(x)\varphi(x)\}$$

die Lösungsgesamtheit des homogenen Differentialgleichungssystems.

Für $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n \in L$ *sind äquivalent*

(a) $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ *ist eine Basis von* L.

(b) Für jedes $x_0 \in I$ *ist* $(\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^n(x_0))$ *eine Basis des* $\mathbb{K}^n$.

(c) Es gibt ein $x_0 \in I$, *so dass* $(\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^n(x_0))$ *eine Basis des* $\mathbb{K}^n$ *ist.*

12.10 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $A\colon I \to \mathbb{K}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung. Sei

$$L = \{\varphi\colon I \to \mathbb{K}^n \mid \varphi'(x) = A(x)\varphi(x)\}$$

die Lösungsgesamtheit des homogenen Differentialgleichungssystems. Jede Basis $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ von L bezeichnet man als *Fundamentalsystem* des Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$.

Für beliebige n Funktionen $\varphi^1, \dots, \varphi^n \in L$ bezeichnet man die Funktion $W : I \to \mathbb{K}$,

$$W(x) = \det(\varphi^1, \dots, \varphi^n) = \begin{pmatrix} (\varphi^1)_1(x) & \dots & (\varphi^n)_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ (\varphi^1)_n(x) & \dots & (\varphi^n)_n(x) \end{pmatrix}$$

als *Wronski-Determinante von* $\varphi^1, \dots, \varphi^n$.

12.11 Bemerkung. Die Wronski-Determinante $W(x) = \det(\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x))$ verschwindet entweder für alle oder für gar kein $x \in I$.

12.12 Beispiel.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

Zwei Lösungen sind gegeben durch

$$\varphi^1(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi^2(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}.$$

Ihre Wronski-Determinante ist gleich -1. Daher ist (φ^1, φ^2) ein Fundamentalsystem.

12.13 Satz. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A\colon I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ seien stetige Abbildungen. Sei L der Lösungsraum des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ und sei ψ_0 eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y + b(x)$. Dann ist die Lösungsgesamtheit des inhomogenen Differentialgleichungssystems gleich $\psi_0 + L$.*

12.14 Bemerkungen. (a) Die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y = A(x)y$ besteht also aus allen Abbildungen der Form $\varphi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x)$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

(b) Kennt man die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = A(x) \cdot y$, sowie eine beliebige Lösung ψ des inhomogenen Differentialgleichungssystems $y' = A(x) \cdot y + b(x)$, so kennt man auch die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems. Sie ist nämlich von der Form

$$\varphi(x) = \psi(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(x),$$

wobei $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

Für lineare Differentialgleichungssysteme mit variablen Koeffizienten gibt es kein allgemeines Verfahren zum Finden eines Fundamentalsystems. Wenn man aber für ein homogenes Differentialgleichungssystem ein Fundamentalsystem kennt, dann kann man mit der Methode der Variation der Konstanten eine Lösung des inhomogenen Systems bekommen.

12.15 Bemerkung. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $A\colon I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ und $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ seien stetige Abbildungen. Sei $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ ein Fundamentalsystem für das homogene Differentialgleichungssystem $y' = A(x)y$. Definiere $\Phi\colon I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ durch $\Phi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^n(x))$. Dann $\Phi'(x) = A(x) \cdot \Phi(x)$ und die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems besteht aus allen Abbildungen $x \mapsto \Phi(x)c$, wo c den $\mathbb{K}^n$ durchläuft.

Aus der Linearen Algebra ist der folgende Satz bekannt:

12.16 Satz (Cramersche Regel). *Sei* k *ein Körper. Für* $A \in k^{n\times n}$ *mit* $\det(A) \neq 0$ *gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A},$$

wobei $\widetilde{A}$ *eine* $n \times n$*-Matrix ist, die aus geeigneten Unterdeterminanten von* A *besteht.*

12.17 Bemerkung. Im Falle $n = 2$ lautet die Cramersche Regel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

12.18 Satz. *Die Menge* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ *aller invertierbarer Matrizen im* $\mathbb{K}^{n\times n}$ *ist offen. Die Abbildung*

$$T\colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}), \quad A \mapsto A^{-1},$$

ist stetig.

12.19 Lemma. *Es sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall und es seien* $A\colon I \to \mathbb{K}^{m\times n}$ *und* $B\colon I \to \mathbb{K}^{k\times m}$ *differenzierbare Abbildungen. Dann ist* $B \circ A\colon I \to \mathbb{K}^{k\times n}$, $x \mapsto B(x) \circ A(x)$, *differenzierbar mit* $(B \circ A)'(x) = B'(x) \circ A(x) + B(x) \circ A'(x)$.

12.20 Satz (Variation der Konstanten). *Für* A, b *und* Φ *wie in 12.15 wird eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems* $y' = A(x)y + b(x)$ *gegeben durch*

$$\psi(x) = \Phi(x) \cdot u(x),$$

wobei

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(t) \cdot b(t)dt.$$

12.21 Beispiel. Betrachte

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + 1 \\ y_2' &= -y_1 + 2 \end{aligned}$$

Wir hatten bereits ein Fundamentalsystem für das homogene Differentialgleichungssystem ausgerechnet: Dieses führt zu

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}.$$

Die Cramersche Regel ergibt $\Phi^{-1}(x) = \Phi(x)$ für alle x. Damit erhalten wir

$$u(x) = \int_0^x \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\cos x + 2\sin x + 1 \\ \sin x + 2\cos x - 2 \end{pmatrix}.$$

Schließlich

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 2 - 2\cos x + \sin x \\ -1 + \cos x + 2\sin x \end{pmatrix}.$$

12.22 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $a_0, \dots, a_{n-1}, b \colon I \to \mathbb{K}$ stetig. Dann bezeichnet man

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x)$$

als *lineare Differentialgleichung* n*-ter Ordnung*. Ist $b(x) = 0$ für alle x, so ist sie *homogen*.

12.23 Satz. *(a) Die Lösungsgesamtheit* L *von*

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}$$

ist ein n*-dimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum.*

(b) $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L$ *bilden genau dann eine Basis von* L*, wenn für ein und damit für alle* $x \in I$ *gilt* $W(x) \neq 0$*, wobei*

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

die Wronski-Determinante der Differentialgleichung ist.

(c) Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b(x) \tag{12.1}$$

ist gleich $\psi + L$*, wobei* ψ *eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.*

(d) Jede Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ *besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung* $\varphi : I \to \mathbb{K}$*.*

12.24 Bemerkung (Variation der Konstanten). Hier nur für $n = 2$. Gegeben sei also die Differentialgleichung

$$y'' = a_0(x)y + a_1(x)y' + b(x). \tag{12.2}$$

Das zugehörige System erster Ordnung ist

$$Y' = A(x)Y + B(x) \tag{12.3}$$

mit

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Es sei (φ_1, φ_2) ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung (12.2). Dann ist

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem für (12.3). Sei $W(x)$ die zugehörige Wronski-Determinante. Dann sagt die Cramersche Regel

$$\Phi^{-1}(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} \varphi_2'(x) & -\varphi_2(x) \\ -\varphi_1'(x) & \varphi_1(x) \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems (12.3) ist daher

$$\Psi(x) = \Phi(x) \int \Phi^{-1}(x) B(x) dx = \Phi(x) \int \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} -\varphi_2(x) b(x) \\ \varphi_1(x) b(x) \end{pmatrix} dx.$$

Die erste Komponente von $\Psi(x)$ ist dann eine Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung (12.2). Sie hat die Gestalt

$$\psi(x) = -\varphi_1(x) \int \frac{\varphi_2(x) b(x)}{W(x)} dx + \varphi_2(x) \int \frac{\varphi_1(x) b(x)}{W(x)} dx.$$

12.25 Bemerkung (D'Alembertsches Reduktionsverfahren). Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = a_0(x) y + a_1(x) y'.$$

Dann besteht jedes Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen. Eine Lösung $\varphi_1 \neq 0$ sei bekannt. Dann erlaubt das Reduktionsverfahren von d'Alembert, auf einem Intervall, auf welchem φ_1 nur positive Werte annimmt, eine linear unabhängige Lösung φ_2 zu bestimmen. Dazu macht man den Ansatz $\varphi_2 = u\varphi_1$ mit einer zweimal differenzierbaren Funktion u. Man findet dann nach Einsetzen der Differentialgleichung für φ_1

$$\varphi_2''(x) = u''(x)\varphi_1(x) + 2u'(x)\varphi_1'(x) + u(x)a_0(x)\varphi_1(x) + u(x)a_1(x)\varphi_1'(x)$$

und

$$a_0(x)\varphi_2(x) + a_1(x)\varphi_2'(x) = a_0(x)u(x)\varphi_1(x) + a_1(x)u'(x)\varphi_1(x) + a_1(x)u(x)\varphi_1'(x).$$

Der Vergleich beider Ausdrücke führt durch Auslöschung der gefärbten Terme auf

$$u''(x) = u'(x)\left(a_1(x) - \frac{2\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}\right).$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für u'. Ihre Lösungen sind Vielfache von
$$u'(x) = \frac{1}{\varphi_1^2(x)} \exp\left(\int a_1(t)dt\right).$$

12.26 Beispiel.
$$y'' = -4y' - 4y.$$

Exponentialansatz liefert eine Lösung, nämlich $\varphi_1(x) = e^{-2x}$. Das d'Alembertsche Reduktionsverfahren führt auf die Differentialgleichung $u'(x) = 1$. Also $\varphi_2(x) = xe^{-2x}$.

13. Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wie im vorigen Kapitel auch sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

13.1 Definition. Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so bezeichnet man die Gleichung

$$y' = Ay$$

als *homogenes lineares Differentialgleichungssytem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.*

13.2 Bemerkung. Die Lösungen eines linearen Differentialgleichungssytems mit konstanten Koeffizienten sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

13.3 Definition. Sei X ein metrischer Raum.

(a) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge,* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

(b) X heißt *vollständig,*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

(c) Ein normierter Raum heißt *Banachraum*, wenn er vollständig ist.

13.4 Satz. *Jeder endlich-dimensionale normierte Raum ist ein Banachraum.*

13.5 Definition. Sei V ein normierter Raum und sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in V.

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *konvergent,* wenn die Folge $\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ in V konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent,* wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.

13.6 Satz. *In einem Banachraum ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.*

13.7 Definition. Im Banachraum $\mathbb{K}^{n \times n}$ bezeichne E_n die Einheitsmatrix. Wir setzen $A^0 = E_n$ für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und definieren

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Man bezeichnet $\exp A$ als *Matrixexponential* von A. Man schreibt auch $\exp A = e^A$.

13.8 Beispiel. (a) Für eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

gilt

$$\exp D = \begin{pmatrix} e^{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{d_n} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.9 Lemma. *Für* $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *mit* $AB = BA$ *gilt* $e^{A+B} = e^A e^B$.

13.10 Satz. *Sei* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{K}^{n\times n}$ *gegeben durch* $f(x) = \exp(xA)$*. Dann ist* f *differenzierbar mit* $f'(x) = A\exp(xA)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

13.11 Korollar. *Ist* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ *und* $y_0 \in \mathbb{K}^n$*, so ist die einzige Lösung der Anfangswertaufgabe* $y' = Ay$, $y(x_0) = y_0$*, gegeben durch*

$$\varphi(x) = e^{(x-x_0)A} y_0.$$

Beispiel. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= 0, \end{aligned}$$

zusammen mit der Anfangsbedingung $y(1) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. In Matrixschreibweise lautet die Differentialgleichung $y' = Ay$ für $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Das Matrixexponential von A hatten wir in Beispiel 13.8 bestimmt. Daher löst die folgende Funktion die Anfangswertaufgabe

$$\varphi(x) = e^{(x-1)A} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-x \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Spannende Frage: Wie rechnet man $\exp(xA)$ konkret aus? Dabei hilft die Lineare Algebra. Ich wiederhole die entscheidenden Ergebnisse ohne Beweis.

13.12 Definition. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es einen Vektor $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gibt, für den $Av = \lambda v$. Jedes $v \in \mathbb{K}^n$ mit $Av = \lambda v$ ist dann ein *Eigenvektor* zum Eigenwert λ. Die Menge

$$E_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}$$

ist der *Eigenraum* zum Eigenwert λ.

13.13 Bemerkung. (a) $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn

$$\det(\lambda E_n - A) = 0.$$

Die Funktion $\chi_A \colon x \mapsto \det(xE_n - A)$ bezeichnet man als *charakteristisches Polynom* von A.

(b) Da jedes nicht konstante, komplexe Polynom mindestens eine Nullstelle hat, besitzt jedes $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $\mathbb{C}$ mindestens einen Eigenwert.

(c) Wenn λ eine Nullstelle von χ_A der Ordnung k ist, dann sagt man, der Eigenwert λ besitze die *algebraische Vielfachheit* k.

(d) Die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ ist definiert als die Dimension des $\mathbb{K}$-Vektorraums $E_\lambda(A)$.

13.14 Definition. $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *diagonalisierbar*, wenn der $\mathbb{K}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren besitzt.

13.15 Bemerkung. In der Linearen Algebra wird gezeigt:

(a) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert von A die algebraische und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

(b) Wenn $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, dann ist A über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

(c) Im komplexen Fall gilt: Wenn die Transponierte von A gleich der komplex Konjugierten von A ist, dann ist A diagonalisierbar, und alle Eigenwerte sind reell.

(d) Es sei A diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und einer Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von Eigenvektoren, so dass $Av_j = \lambda_j v_j$. Sei

$$T = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

und sei D die Diagonalmatrix mit $D_{j,j} = \lambda_j$. Dann $T^{-1}AT = D$.

13.16 Lemma.

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T.$$

13.17 Beispiel. Berechne $\exp(A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\det(xE_2 - A) = x^2 + t^2 = (x - it)(x + it).$$

Also hat A die Eigenwerte $\pm it$. Lösung der entsprechenden linearen Gleichungssysteme liefert uns Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir mit der Cramerschen Regel

$$T = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$D = \begin{pmatrix} it & 0 \\ 0 & -it \end{pmatrix}$$

gilt dann $A = TDT^{-1}$. Also

$$\exp A = T \exp(D) T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

13.18 Beispiel. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht diagonalisierbar.

13.19 Definition. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet man die $(n \times n)$-Matrix

$$J_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

als *Jordan-Block* der Größe n zum Eigenwert λ.

In der Linearen Algebra lernt man

13.20 Satz. *Das charakteristische Polynom von* $J_{\lambda,n}$ *ist gleich*

$$\det(xE_n - J_{\lambda,n}) = (x - \lambda)^n.$$

Der Eigenraum $E_\lambda(J_{\lambda,n})$ *zum einzigen Eigenwert* λ *ist eindimensional. Daher ist* $J_{\lambda,n}$ *nur im trivialen Fall* $n = 1$ *diagonalisierbar.*

13.21 Bemerkung. Trotzdem kann man $\exp(xJ_{\lambda,n})$ leicht ausrechnen. Es ist nämlich $J_{\lambda,n} = \lambda E_n + J_{0,n}$. Wegen $J_{0,n}^n = 0$ ist die Exponentialreihe von $J_{0,n}$ endlich. Man erhält schließlich unter Verwendung von Lemma 13.9

$$\exp(xJ_{\lambda,n}) = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

13.22 Satz (Jordan-Zerlegung). *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gibt es ein $k \leq n$, nicht notwendig verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ und Zahlen $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$ mit $\nu_1 + \cdots + \nu_k = n$, sowie ein invertierbares $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass $T^{-1}AT$ die folgende Blockdiagonalmatrix ist*

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,\nu_1} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,\nu_2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & J_{\lambda_3,\nu_3} & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{\lambda_k,\nu_k} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Das Matrixexponential einer Blockdiagonalmatrix A ist eine Blockdiagonalmatrix, deren Blöcke die Matrixexponentiale der Blöcke von A sind.

13.23 Beispiel. Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_4, \\ y_2' &= -y_2, \\ y_3' &= 6y_2 + 2y_3 + y_4, \\ y_4' &= -y_1 + 4y_4. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise also $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A ist $\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda+1)$. Man findet aber nur jeweils einen linear unabhängigen Eigenvektor zu den Eigenwerten -1 und 2. Daher ist die Jordansche Normalform von A gleich

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Um $\exp(xJ)$ zu bestimmen, schreiben wir J als Summe aus einer Diagonalmatrix und einer kommutierenden nilpotenten Matrix, also $J = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann

$$\exp(xD) = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \exp(xN) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\exp(xJ) = \exp(xD) \circ \exp(xN) = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & \frac{1}{2}x^2e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} & xe^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Daraus kann man bereits ablesen: Jede Komponente einer beliebigen Lösung von $y' = Ay$ ist eine $\mathbb{C}$-lineare Kombination der vier Funktionen e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x} und e^{-x}.

Die Transformationsmatrix T bestimmt man zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix T ist bestimmt durch $A = T \circ J \circ T^{-1}$. (In der ersten und der letzten Spalte von T stehen Eigenvektoren.) Schließlich

$$\exp(xA) = T \circ \exp(xJ) \circ T^{-1} = \begin{pmatrix} -2xe^{2x} + e^{2x} & 0 & 0 & 4xe^{2x} \\ 0 & e^{-x} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}x^2e^{2x} & 2e^{2x} - \frac{2}{e^x} & e^{2x} & x^2e^{2x} + xe^{2x} \\ -xe^{2x} & 0 & 0 & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{pmatrix}$$

In den Spalten von $\exp(xA)$ steht ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung $y' = Ay$.

Man kann also zu jeder Matrix das Matrixexponential ausrechnen, indem man die Jordan-Zerlegung bestimmt. Bei der Lösung von Differentialgleichungssytemen ist es aber häufig vorteilhaft, einen Ansatz unter Berücksichtigung des folgenden Satzes zu machen.

13.24 Satz. *Sei* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mit komplexen Eigenwerten* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. *Die algebraische Vielfachheit von* λ_j *sei* α_j, *die geometrische sei* γ_j. *Schließlich sei* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ *eine Lösung von* $y' = Ay$. *Dann ist jede der Funktionen* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *eine komplexe Linearkombination der Funktionen*

$$f_{j,\nu}\colon x \mapsto x^\nu e^{\lambda_j x}, \quad 1 \le j \le k,\ 0 \le \nu \le \alpha_j - \gamma_j.$$

13.25 Bemerkung. Ist A reell und $\lambda_j = a_j + ib_j$ ein echt komplexer (also mit $b_j \neq 0$) Eigenwert von A, dann ist $\overline{\lambda_j} = a_j - ib_j$ auch ein echt komplexer Eigenwert von A. Wenn wir *reelle* Lösungen von $y' = Ay$ suchen, dann werden im Satz 13.24 die reellen Funktionen $x^\nu e^{a_j x}\cos(b_j x)$ und $x^\nu e^{a_j x}\sin(b_j x)$ statt der komplexen Funktionen $x^\nu e^{\lambda_j x}$ und $x^\nu e^{\overline{\lambda}_j x}$ benutzt.

13.26 Beispiel. (a)

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

Dann

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist $\chi_A(x) = (x-2-i)(x-2+i)$. Also sind die Lösungen von der Form

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \alpha_1 e^{2x}\cos(x) + \alpha_2 e^{2x}\sin(x) \\ y_2(x) &= \alpha_3 e^{2x}\cos(x) + \alpha_4 e^{2x}\sin(x). \end{aligned}$$

Die Unbekannten $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ bestimmt man, indem man den Ansatz in die Differentialgleichung einsetzt. Man findet

$$\alpha_3 = -\alpha_2 \quad \text{und} \quad \alpha_4 = \alpha_1.$$

Damit erhält man schließlich das folgende Fundamentalsystem

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}\cos(x) \\ e^{2x}\sin(x) \end{pmatrix} \qquad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}\sin(x) \\ -e^{2x}\cos(x) \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 5y_2. \end{aligned}$$

Dann

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

und $\chi_A(x) = (x-3)^2$. Der Ansatz lautet nun

$$y_1(x) = \alpha_1 e^{3x} + \alpha_2 x e^{3x}$$
$$y_2(x) = \alpha_3 e^{3x} + \alpha_4 x e^{3x}.$$

Wir erhalten

$$\alpha_2 = -2\alpha_1 + 2\alpha_3 \quad \text{und} \quad \alpha_4 = \alpha_2.$$

Das führt zu dem Fundamentalsystem

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} - 2xe^{3x} \\ -2xe^{3x} \end{pmatrix} \qquad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 2xe^{3x} \\ e^{3x} + 2xe^{3x} \end{pmatrix}.$$

Das wird jetzt auf Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten angewandt.

13.27 Bemerkung. Zur Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}$$

gehört das Differentialgleichungssytem erster Ordnung $Y' = AY$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

13.28 Lemma. $\chi_A(x) = x^n - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{n-1} x^{n-1}$.

13.29 Satz. *Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Gegeben sei die Differentialgleichung $y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}$ der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom sei wie folgt in Linearfaktoren zerlegt*

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2} \cdots (x-\lambda_k)^{\alpha_k},$$

wobei die λ_j paarweise verschieden sind. Dann bilden die Funktionen

$$x \mapsto x^m e^{\lambda_j x} \quad \textit{mit } j = 1, \dots, k,\ m = 0, \dots, \alpha_j - 1$$

ein Fundamentalsystem.

13.30 Satz. *Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Gegeben sei die Differentialgleichung $y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_{n-1} y^{(n-1)}$ der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom sei wie folgt in Linearfaktoren zerlegt*

$$x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0 = (x-\lambda_1)^{\alpha_1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2} \cdots (x-\lambda_k)^{\alpha_k},$$

wobei die λ_j *paarweise verschieden sind. Weil das charakteristische Polynom reell ist, treten nicht-reelle* λ_j *immer zusammen mit ihrem komplex konjugierten auf. Daher kann man die* λ_j *so anordnen, dass* $\lambda_{2r+1}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ *und*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_1 + id_1, \\ \lambda_2 &= c_1 - id_1, \\ \lambda_3 &= c_2 + id_2, \\ &\vdots \\ \lambda_{2r-1} &= c_r + id_r, \\ \lambda_{2r} &= c_r - id_r, \end{aligned}$$

wobei $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ *und* $d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{array}{lll} x^m e^{c_j x} \cos(d_j x) & j = 1, \dots, r, & m = 0, \dots, \alpha_j - 1 \\ x^m e^{c_j x} \sin(d_j x) & j = 1, \dots, r, & m = 0, \dots, \alpha_j - 1 \\ x^m e^{\lambda_j x} & j = 2r+1, \dots, k, & m = 0, \dots, \alpha_j - 1 \end{array}$$

ein Fundamentalsystem.

13.31 Bemerkung (Ansatz)*.* Wenn für eine inhomogene, lineare Differentialgleichung höherer Ordnung die Inhomogenität von der Gestalt $P(x)e^{\lambda x}$ ist, wobei P ein Polynom vom Grad d ist, dann macht man einen Ansatz der Form $Q(x)e^{\lambda x}$. Wenn k die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dann ist der Grad von Q als $d + k$ zu wählen.

Für trigonometrische Funktionen verfährt man analog, muss dann aber immer beide trigonometrischen Funktionen berücksichtigen.

13.32 Beispiel. $y'' = y + 3e^x$. Das charakteristische Polynom ist $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ und $d = 0$. Daher bilden $\varphi_1(x) = e^x$ und $\varphi_2(x) = e^{-x}$ ein Fundamentalsystem für die Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

Wir bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung furch Ansatz $\psi(x) = Q(x)e^x$. Wir müssen Q vom Grad 1 wählen. Der Ansatz $e^x(ax + b)$ ist aber unnötig kompliziert, weil e^x eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. Also $\psi(x) = axe^x$. Dann $\psi'(x) = e^x(ax + a)$ und $\psi''(x) = e^x(ax + 2a)$. Eingesetzt in die Differentialgleichung erhalten wir

$$e^x(ax + 2a) = axe^x + 3e^x.$$

Also ist $\psi(x) = \frac{3}{2}xe^x$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung hat die Gestalt

$$\varphi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{3}{2} x e^x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

14. Der Banachsche Fixpunktsatz

14.1 Definition. Sei X eine Menge und $G\colon X \to X$ eine Abbildung. Ein Element $x \in X$ heißt *Fixpunkt* von G, wenn $G(x) = x$.

14.2 Beispiel. In der Analysis I hatten wir auf Blatt 6 den folgenden Fixpunktsatz bewiesen: *Es sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein kompaktes Intervall und* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *stetig mit* $f(I) \subset I$. *Dann besitzt* f *einen Fixpunkt.*

14.3 Definition. Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung $G\colon X \to X$ heißt *kontrahierend,* wenn es ein $q < 1$ gibt, so dass

$$d(G(x), G(y)) \leq q\,d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

14.4 Bemerkung. Eine kontrahierende Abbildung ist Lipschitz-stetig, speziell also stetig.

14.5 Satz (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei* X *ein vollständiger metrischer Raum und* $G\colon X \to X$ *eine kontrahierende Abbildung. Dann besitzt* G *genau einen Fixpunkt.*

Idee. Wähle $x_0 \in X$ beliebig und definiere rekursiv $x_{n+1} = G(x_n)$. Man zeigt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. □

Beweis. Eindeutigkeit: Seien $x, y \in X$ zwei Fixpunkte. Dann

$$d(x, y) = d(G(x), G(y)) \leq q\,d(x, y).$$

Das kann nur sein, wenn $d(x, y) = 0$.

Existenz: Sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt. Definiere rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$x_{n+1} = G(x_n).$$

Dann zeigt man induktiv

$$d(x_j, x_{j+1}) \leq q\,d(x_{j-1}, x_j) \leq q^2 d(x_{j-2}, x_{j-1}) \leq \cdots \leq q^j d(x_0, x_1).$$

Falls $x_1 = x_0$, so ist der Fixpunkt gefunden. Andernfalls zeigen wir, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen $q < 1$ existiert dazu ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$q^N < \frac{\epsilon(1-q)}{d(x_0, x_1)}.$$

Seien nun $n, m \geq N$. Wir nehmen an, dass $n > m$.

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{j=m}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq \sum_{j=m}^{n-1} q^j d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x_1) \sum_{j=m}^{\infty} q^j = \frac{q^m d(x_0, x_1)}{1-q} < \epsilon.$$

Da der Raum X vollständig ist, existiert $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Daraus folgt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = G(x). \qquad \square$$

In dieser Form kann man mit dem Satz noch nicht viel anfangen. Eine praktisch einsetzbare Variante ist die folgende.

14.6 Satz. *Sei* X *ein vollständiger metrischer Raum, seien* $x_0 \in X$ *und* $R > 0$. *Sei* $G\colon \overline{B}_R(x_0) \to X$ *eine Abbildung. Es gebe ein* $q < 1$, *so dass*

(a) $d(G(x), G(y)) \leq q d(x, y)$ *für alle* $x, y \in \overline{B}_R(x_0)$,

(b) $d(G(x_0), x_0) \leq R(1-q)$.

Dann gibt es genau ein $x \in \overline{B}_R(x_0)$ *mit* $G(x) = x$.

Beweis. Wir zeigen $G(\overline{B}_R(x_0)) \subset \overline{B}_R(x_0)$ und wenden den vorhergehenden Satz an. Für $y \in \overline{B}_R(x_0)$ gilt

$$d(G(y), x_0) \leq d(G(y), G(x_0)) + d(G(x_0), x_0) \leq q d(y, x_0) + R(1-q) \leq qR + R - qR = R.$$

$\square$

15. Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Wir formulieren die Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ um in eine Fixpunktgleichung in einem Banachraum von Funktionen.

15.1 Lemma. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, sei $H \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon I \times H \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $(x_0, y_0) \in I \times H$ und sei $J \subset I$ ein offenes Intervall mit $x_0 \in J$. Für eine stetige Abbildung $\varphi\colon J \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(J) \subset H$ definieren wir eine stetige Abbildung $G(\varphi)\colon J \to \mathbb{R}^n$ durch*

$$(G(\varphi))(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt.$$

Dann ist φ genau dann eine Lösung der Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, wenn $G(\varphi) = \varphi$.

15.2 Definition. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Definiere

$$C(I, \mathbb{K}^n) = \{f\colon I \to \mathbb{K}^n \mid f \text{ stetig}\}$$

und versehe ihn mit der Norm

$$\|f\| = \max\{\|f(x)\| \mid x \in I\}.$$

Man schreibt $C(I)$ anstelle von $C(I, \mathbb{R})$.

Bemerkung. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(I)$ konvergiert genau dann in $C(I)$ gegen f, wenn sie gleichmäßig gegen f konvergiert.

15.3 Satz. $C(I, \mathbb{K}^n)$ *ist ein Banachraum.*

Damit beweisen wir nun den lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz 11.13.

Idees des Beweises von Satz 11.13. Wende Banachschen Fixpunktsatz an auf die Abbildung G. Damit G kontrahierend ist, muss das Intervall J klein gemacht werden. $\square$

15.4 Beispiel. Löse die AWA $y' = -y + \frac{1}{x}$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ mit Anfangsbedingung $y(1) = 0$. Dann $\varphi_0(x) = 0$, $\varphi_1(x) = \log x$, $\varphi_2(x) = (x-1)(1-\log x)$. Die korrekte Lösung ist $e^{-x}\int_1^x e^t/t\,dt$. Dieses Integral ist nicht geschlossen darstellbar.

15.5 Theorem (Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall und sei* $f\colon I \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ *stetig. Für jedes kompakte Teilintervall* $K \subset I$ *sei* $f|_{K \times \mathbb{K}^n}$ *Lipschitz-stetig im zweiten Argument. Sei ferner* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$*. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung* $\varphi\colon I \to \mathbb{K}^n$ *der Anfangswertaufgabe* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

15.6 Korollar (Satz 12.7). *Sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall,* $A\colon I \to \mathbb{K}^{n \times n}$ *und* $b\colon I \to \mathbb{K}^n$ *seien stetige Abbildungen. Sei* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^n$*. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe* $y' = A(x)y + b(x)$, $y(x_0) = y_0$, *eine eindeutig bestimmte Lösung* $\varphi\colon I \to \mathbb{K}^n$.

15.7 Satz. *Sei* $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ *offen und sei* $f\colon U \to \mathbb{K}^n$ *stetig und lokal Lipschitz-stetig im zweiten Argument. Sei* $(x_0, y_0) \in U$*, und sei* $\varphi\colon I \to \mathbb{K}^n$ *eine Lösung der Anfangswertaufgabe* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, *mit maximalem Definitionsbereich* $I = (a, b)$. *Sei schließlich*

$$\mathcal{G} = \{(x, \varphi(x)) \in I \times V \mid x_0 \le x < b\}$$

die rechte Seite des Graphen von φ. *Dann ist* $\overline{\mathcal{G}}$ *keine kompakte Teilmenge von* U.

Die analoge Aussage gilt für die linke Seite des Graphen.

15.8 Beispiel. Betrachte die Differentialgleichung

$$y' = -y^2.$$

Ihre Lösungsgesamtheit besteht den folgenden drei Funktionsklassen

$$\begin{aligned}
&\varphi\colon (-\infty, C) \to \mathbb{R}, &\qquad& x \mapsto \frac{1}{x - C}, &\qquad& C \in \mathbb{R},\\
&\varphi\colon (C, \infty) \to \mathbb{R}, && x \mapsto \frac{1}{x - C}, && C \in \mathbb{R},\\
&\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && x \mapsto 0.
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass in allen Fällen weder die rechte noch die linke Seite des Graphen kompakt in $U = \mathbb{R}^2$ sind.

Teil III.

Der Satz über implizite Funktionen

16. Der Umkehrsatz

16.1 Lemma. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $x_0 \in U$*,* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *in* x_0 *differenzierbar und* $(Df)(x_0) \neq 0$*. Wenn sie Funktion* $g : U \to \mathbb{R}$*,* $g(x) = \|f(x)\|$*, ein lokales Minimum in* x_0 *hat, dann gilt* $f(x_0) = 0$*.*

16.2 Definition. Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $\psi\colon U \to V$ von der Klasse C^k heißt C^k-Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv ist und die Umkehrabbildung ψ^{-1} ebenfalls von der Klasse C^k ist.

16.3 Bemerkungen. (a) Die Abbilung $f\colon (-1,1) \to (-1,1)$, $x \mapsto x^3$, ist bijektiv und von der Klasse C^∞, aber noch nicht mal ein C^1-Diffeomorphismus.

(b) $\psi\colon U \to V$ sei ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist für jedes $u \in U$ die Matrix $D(\psi)(u) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Das folgt sofort aus der Kettenregel.

(c) Die Umkehrung gilt nicht. Betrachte

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix}.$$

Dann ist $Df(x,y)$ für jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ invertierbar. Trotzdem ist f nicht invertierbar.

16.4 Definition. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ heißt *lokaler* C^k*-Diffeomorphismus*, falls es zu jedem Punkt $x \in U$ eine Umgebung W von x gibt, so dass $f(W)$ offen und $f\colon W \to f(W)$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

16.5 Theorem (Umkehrsatz). *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und* $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*. Eine Abbildung* $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ *von der Klasse* C^k *ist genau dann ein lokaler* C^k*-Diffeomorphismus, wenn für alle* $x \in U$ *die Matrizen* $Df(x)$ *invertierbar sind.*

16.6 Beispiel (Kugelkoordinaten). Für $q = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sei $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Im Fall $q \neq 0$ gibt es genau ein $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mit $z = r\sin\theta$. Der Winkel θ ist der Breitengrad von q. Es folgt dann $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta$. Schreibt man jetzt (x,y) in ebenen Polarkoordinaten, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

φ ist dann der Längengrad von q. Wir haben gerade gesehen, dass $\Psi\colon [0,\infty) \times (-\pi,\pi] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ surjektiv ist. Es gilt

$$D\Psi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\cos(\theta) & -r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\cos(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dann $\det(D\Psi(r,\varphi,\theta)) = r^2\cos\theta$. Also ist Ψ ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus auf $\{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid r \neq 0, \cos\theta \neq 0\}$. Aus den Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen folgt, dass $\Psi\colon U \to \mathbb{R}^3 \setminus H$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist, wenn $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ und $H = \{(x,0,z) \mid x \leq 0,\ z \in \mathbb{R}\}$.

Die folgende Formulierung des Umkehrsatzes impliziert Theorem Theorem 16.5.

16.7 Satz. *Sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *der Klasse* C^k. *Ist* $x_0 \in U$, $f(x_0) = y_0$ *und* $\det DF(x_0) \neq 0$, *so gibt es offene Umgebungen* $V(x_0) \subseteq U$ *und* $W(y_0) \subseteq \mathbb{R}^n$, *so dass gilt:*

1) $\det DF(x) \neq 0$ *für alle* $x \in V(x_0)$,

2) $f : V(x_0) \to W(y_0)$ *ist bijektiv,*

3) $f^{-1} : W(y_0) \to V(x_0)$ *ist der Klasse* C^k,

4) Für $x \in V(x_0)$ *und* $y = f(x)$ *ist* $Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$.

Insbesondere ist f *ein* C^k*-Diffeomorphismus auf* $V(x_0)$.

17. Der Satz über implizite Abbildungen

17.1 Beispiel. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ ist eine Kurve im $\mathbb{R}^2$. Sie wird in Abbildung 17.1 gezeigt. Fast überall ist sie wenigstens lokal der Graph einer Funktion.

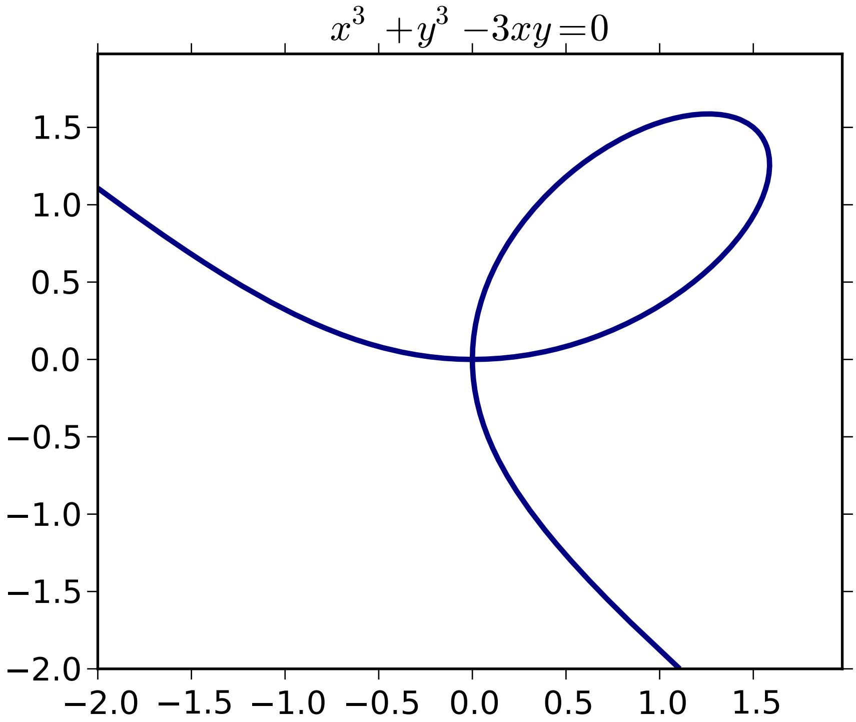

Abbildung 17.1.: Das kartesische Blatt

17.2 Definition. Wenn die Elemente von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ als (x,y) mit $x \in \mathbb{R}^k$ und $y \in \mathbb{R}^m$ geschrieben werden, dann definiert man für offene Mengen $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ und Abbildungen $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $F_1, \dots, F_n$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial y_m} \end{pmatrix}.$$

17.3 Theorem (Satz über implizite Funktionen). *Seien* $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ *und* $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ *offen und seien* $x_0 \in U_1$, $y_0 \in U_2$. *Sei* $F\colon U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ *von der Klasse* C^1 *mit* $F(x_0, y_0) = 0$. *Ferner sei die Matrix* $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ *invertierbar. Dann gibt es eine Umgebung* $U \subset U_1$ *von* x_0, *eine Umgebung* $V \subset U_2$ *von* y_0 *und eine Abbildung* $g\colon U \to V$ *von der Klasse* C^1 *mit den folgenden Eigenschaften*

(a) $F(x, g(x)) = 0$ *für alle* $x \in U$.

(b) Wenn $F(x, y) = 0$ *für* $(x, y) \in U \times V$, *dann* $y = g(x)$.

Es gilt

$$Dg(x_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \circ \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right).$$

Falls F *von der Klasse* C^p *ist, so auch* g.

17.4 Beispiel. Sei $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ und sei K die Kurve $K = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$. Wir suchen alle Punkte $(x_0, y_0) \in K$, in denen sich K in einer Umgebung als Graph $y = g(x)$ schreiben lässt

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3y_0^2 - 3x_0.$$

Also $x_0 = y_0^2$. Das setzt man in f ein

$$0 = f(y_0^2, y_0) = y_0^6 - 2y_0^3.$$

Also $y_0 = 0$ oder $y_0 = \sqrt[3]{2}$ und daher $(x_0, y_0) = (0, 0)$ oder $(x_0, y_0) = \left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}\right)$. Im zweiten dieser Punkte gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}\right) = 3\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 - 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} \neq 0.$$

Daher kann dort die Kurve als Graph $x = h(y)$ geschrieben werden. Dagegen gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. Dort lässt sich der Satz über implizite Funktionen nicht anwenden, und in der Tat ist K dort lokal kein Graph. (Der algebraische Geometer sagt: “K besitzt im Ursprung eine Singularität.”)