Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Oleg Bogopolski
Svenja Lage

SoSe 2019
Abgabe Di., 11.06, 10:20 Uhr

Aufgabe 5 werden Sie ab Freitag lösen können.

Analysis II
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Bestimmen Sie alle Lösungen des Differentialgleichungssystems [5P]

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \cos x, \\ y_2' = y_1 e^{-\sin x}. \end{cases}$$

Aufgabe 2. Sei $A : (0, \infty) \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch [10P]

$$A(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & 1 \\ 0 & \frac{3}{x} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = A(x)y$ auf dem Intervall $x \in (0, \infty)$. Finden Sie ein Fundamentalsystem (Φ_1, Φ_2) dieses Differentialgleichungssystems, welches der Anfangsbedingung $\Phi_1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_2(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, genügt.

Aufgabe 3.

(a) Überprüfen Sie, dass die folgende Formel eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $M(n, n, \mathbb{R})$ aller reellen $n \times n$-Matrizen angibt: [3P]

$$||A||_F := \Big(\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2\Big)^{1/2}.$$

Diese Norm heißt *Frobeniusnorm* auf $M(n, n, \mathbb{R})$.

(b) Beweisen Sie: Für $n \geqslant 2$ existiert keine Norm $|| \cdot ||$ auf $\mathbb{R}^n$, so dass

$$||A||_F = \max\{||Ax|| \ \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ und } ||x|| \leqslant 1\}$$

für alle reellen $n \times n$ Matrizen A gilt. [5P]

Hinweis zu (a). Benutzen Sie eine der Aussagen der Vorlesung 1.

Kommentar:
• Nach Definition 12.4 des Kurzskripts bedeutet (b), dass die Frobeniusnorm keine *Matrixnorm* ist, falls $n \geqslant 2$ ist.
• Die Frobeniusnorm ist *submultiplikativ*: Es gilt $||AB||_F \leqslant ||A||_F \cdot ||B||_F$ für alle $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$. Das hilft aber in (a) und (b) nicht.

Fortsetzung Seite 2.

Aufgabe 4. Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ sei

$$A + B = \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt. [5P]

(b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ an, für die $A + B$ nicht abgeschlossen ist. Ein Beweis ist erforderlich. [7P]

Aufgabe 5. Finden Sie die Lösung der Differentialgleichung [5P]

$$y'' - y + xe^x = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.