Proseminar zu Linearen Algebra SS 2010

Gruppen die auf einer Menge operieren. Die Ikosahedrongruppe.

Hümeyra Yilmaz

Heinrich - Heine - Universität
Betreuer: Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Unterteilungen

I. Gruppenoperationen

Definition1:
Eine Gruppe operiert auf einer Menge X, wenn für jedes Element $gx \in X$ gilt:

- $g_2(g_1x) = (g_2g_1)x$
- $ex = x$ für alle $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$

Definition2:
Die Menge $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ heißt Orbit (die Bahn) von dem Element x.

Definition3:
Eine Operation von G auf X heißt transitiv, falls für je zwei Elemente von x, x′von X ein $g \in G$ existiert, so dass

$$gx = x'.$$

Definition4:
Die Stabiliatoruntergruppe ist die Menge

$$St_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Definition5:
Die Menge der Fixpunkte von g in G ist die Menge

$$Fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Definition6:
Kardinalität / Ordnung ist die Anzahl der Elemente einer Menge.
(Bez.: $|G|$ oder Ord(G)).

Definition7:
Index ist die Anzahl der Links-,Rechtsnebenklassen einer Gruppe.
Sei G Gruppe und U Untergruppe, dann ist $|G\backslash U| = |U\backslash G|$ gleichmächtig.
D.h. die Anzahl der Linksnebenklassen und Rechtsnebenklassen sind gleich.
Zur Berechnung wendet man die Formel

$$[G : U] = ord(G) / ord(U).$$

Proposition1:
Die Ordnung von dem Orbit Gx ist gleich dem Index von Stabililsatoruntergruppe $St_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$.

Beweis:

Beh.: Die Abbildung $\{gx \mid g \in G\}$ nach $\{gSt_G(x) \mid g \in G\}$ ist eine Bijektion.

„injektivität": Sei $g_1x \neq g_2x$

$g_1^{-1} g_2 x \neq x$

Hieraus folgt, dass $g_1^{-1} g_2$ kein Element von $St_G(x)$ sein kann.
Damit kann man folgern, dass $g_1St_G(x) \neq g_2St_G(x)$ ist. Also ist die Abbildung injektiv.

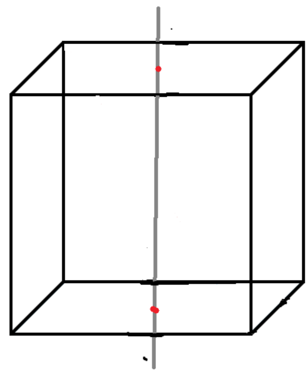
„surjektivität": Jedes Element aus gx bildet auf $gSt_G(x)$ ab.
Also ist die Abbildung auch surjektiv.

Beispiel an einem Würfel:

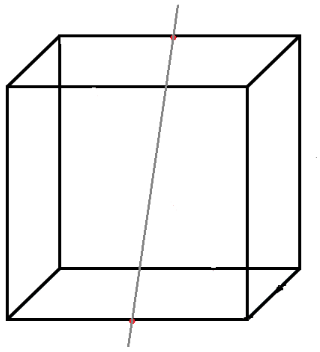
Sei K ein Würfel im 3-dim.-Eukliedschen-Raum und G die isometriche Gruppe, welche uns die Abbildung $K \rightarrow K$ angiebt. Also der Würfel wird wieder insich selbst überführt.
Es giebt vier Möglichkeiten diese Überführung anzugehen:

1) Die Gruppe enthält die identische Isometrie, also der Würfel selber.

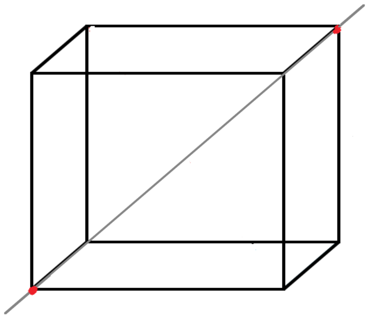
2) Drehung um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seitenflächen, um einen Winkel von $\alpha = 90°, 180°, 270°$.
Man erhält hieraus 3 Achsen, um welche man mit den drei gegebenen Winkeln drehen kann.



3) Drehung um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Kanten, um den Winkel von $\alpha = 180°$.
Man erhält hieraus 6 Achsen.



4) Drehung um eine Achse durch zwei gegenüberliegenden Ecken, um einen Winkel von $\alpha = 120°, 240°$.
Man erhält hieraus 4 Achsen, um welche man mit den zwei gegenenen Winkeln drehen kann.



Nun Kann man anhand dieser Achsen und Winkel die Anzahl der Elenemte in dieser Gruppe bestimmen.

-Man hat eine Identische Isometrie, d.h.	1 Element
-3 Achsen und 3 Winkel bei der erste Drehung, d.h.	9 Elemente
-6 Achsen und ein Winkel bei der zweiten Drehung, d.h.	6 Elemente
-4 Achsen und zwei Winkel bei der dritten Drehung, d.h.	8 Elemente
Also Insgesammt :	24 Elemnte

Wir wollen nun zeigen, dass es keine weiteren Elemente außer diesen 24 Elementen gibt.
Wir wissen, dass die Gruppe G sich auf der Menge der Kanten K° im Würfel transitiv verhält.
Aslo kann man sagen, dass der Stabilisator von der Kante x die gegenüberliegende Kante x´fixieren muss. Somit erhält man 3 Achsen die durch eine Kante x erzeugt werden mit denen man durch die Drehung um $\alpha = 120°$, $240°$ den Würfel in sich überführen kann.
Man hat 8 Möglichkeiten eine Kante zu stabilisieren. Darauf kann man die Proposition1 anwenden und man erhält die Gleichung:

$$|G| = |K°|\ |St_G(x)| = 8*3 = 24$$

Damit haben wir gezeigt, dass es in dieser Gruppe nur 24 Elemente giebt.
Man nennt diese Gruppe „Die Drehgruppe von einem Würfel“.

Beh.: Diese Gruppe ist Isomorpfh zu der Symmetrischengruppe S_4.

$S_4 = \{1\ 2\ 3\ 4\}$, deise enthält ebenfalls 24 möglische permutationen.
Der Kern dieser Gruppe enthält die Identische Isometrie der
der Diagonalen im Würfel.
Also man kann die diagonalen im Uhrzeigersinn 3 mal Drehen plus die identische Diagonale ergirbt 4 Elemente, wie in S4.

Definition8:

Symmetrische Gruppe ist eine Bujektion einer Menge auf sich selbst durch Hintereinendersusführung ihrer Elemente.

Theorem1:

Die Gruppe G operiert auf einer Menge X. Die Kardinalität von der Menge der Bahnen dieser Operation ist gleich $1/|G|\ \Sigma\ |Fix(g)|$.

Beweis:

$$\sum_{g\in G} |Fix(g)| \overset{Def.4\&5}{=} \sum_{x\in X} |St_G(x)| \overset{Prop.1}{=} \sum_{x\in X} |G|/|Gx| \qquad ,da\ |Gx| = [G:St_G(x)] = |G|/|St_G(x)|$$

Die Gleichheit $1/|G|\ \Sigma\ |Fix(g)|$ gilt, da wenn man in einer Menge sagen wir mal 5 Elemente fixiert und dieseElemente aufaddieren würde mit 1/5 ($1/|G|$) so ergiebt es die 1. Also ist die Bahn/ der Orbit gleich dieser Summe.

II. Alternierende Gruppe A_5

Definition9:

Alterniernde Gruppen sind die geraden Permutationen von der symmetrischen Gruppe.

Lemma1:

1) Für $n \geq 3$ wird die Gruppe durch 3-Zyklen erzeugt.
2) Für $n \geq 5$ wird die Gruppe erzeugt durch Permutationen vom Typ (ij)(kl).

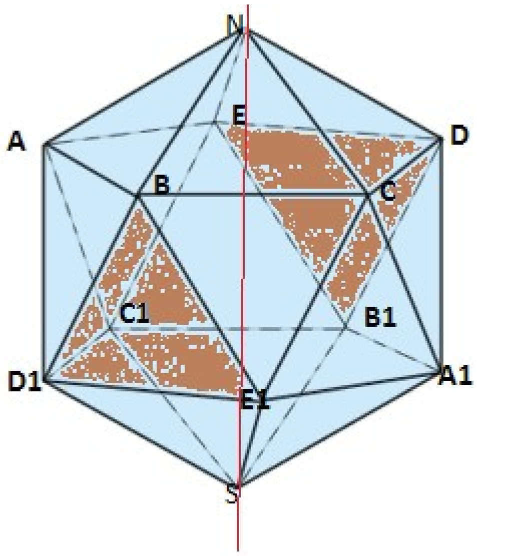
Theorem1: Sei $n \geq 5$. Dann gilt :

1) A_n ist die einzige nichttriviale normale Untergruppe von S_n
2) A_n ist eine einfache Untergruppe

Definition10:

Einfach: Gruppen, die außer sich selber und der Eins-Gruppe keinen Normalteiler besitzen heißen einfach. (Kann man sich wie Primzahlen Vorstellen)

III. Die Ikosahedrongruppe



Um die Elemente dieser Gruppe zu bestimmen geht man genauso wie im Beispiel des Würfels vor.
Die Überführung in die Gruppe selber hat man vier Möglichkeiten.

1) Man hat die In´dentische Isometrie , d.h. — 1 Element
2) Drehung mit $\alpha = k*72°$ (k=1,2,3,4), um Mittelpunkte zweier gegenüberlioegenden Ecken. Mit 6 Achsen ,d.h. — 24 Elemente
3) Drehung mit $\alpha = 180°$, um die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Kanten. Mit 15 Achsen, d.h. — 15 Elemente
4) Drehung mit $\alpha = 2790°, 240°$, um die Mittelpunkte zweier gegenüberliegenden Seitenflächen. Mit 10 Achsen, d.h. — 20 Elemente

Insgesammt hat man also — 60 Elemente

Nun zeigen wir wie gehabt, dass es nur diese 60 Elemente gibt, indem wir wiederum die Prop.1 benutzen. Diesmal nehmen wir als die Kanten des Ikosaeders I°, die gerade die N und S verbindet, welche fixiert wird. Dann hat man nur 5 Drehungen z.B. gegen den Uhrzeigersinn , was den Ikosaeder in sich selber überführt.
Man erhält dann die Gleichung $|G| = |I°|* |St_G(x)| = 12 * 5 = 60$.
Diese Gruppe hat nur diese 60 Elemente und wird als „Die Drehgruppe des Ikosaeders" bezeichnet.

Nun will man zeigen, dass deise Gruppe isomorpf zu A_5 ist.
Dafür werden die 30 Seiten des Ikosaeders_in 5 Gruppen aufgeteilt, welche jeweils zueinender senkrecht oder parallel sind:

1. {NA,SA1,CD,C1D1,BE1,B1E}
2. {NB,S1B,DE,E1D1,CA1,C1A}
3. {NC,SC1,EA,E1A1,DB1,B1D}
4. {ND,SD1,AB,A1B1,EC1,E1C}
5. {NE,SE1,BC,B1C1,AD1,A1D}

Man erkennt, wenn wir um die Achse NS in einem Winkel von $\alpha = 72°$ drehen bekommen wir die Permutation {1 2 3 4 5}.
In diesem Fall haben wir noch eine von $\alpha = 120°$ um die Fläche BE1D1 und B1ED, welche uns die Permutation {1 2 3} gibt.

Man kann also davon ausgehen, dass es eine Untergruppe H= ‹ {1 2 3 4 5},{1 2 3} › gibt.
Nun wollen wir zeigen, dass $H= A_5$ ist.
Die Permutationen in deiser Untergruppe sind gerade, offenbar ist $H \leq A_5$.
Die Ordnung von H ist durch 15 Teilbar, also enthält diese die Elemente der Ordnung 3 und 5.
Man kann annehmen, dass es noch eine Untergruppe von H existiert, welches ein Normalteiler von A_5 ist.
Dies steht aber im Wiederspruch mit der Einfachheit der Alterniernden Gruppe, da diese nur sich selber und die Eins-Gruppe als Normalteiler besitzt. Die Eins-Gruppe kann nicht angenommen werden, da man sonst 60 Elemente hätte, welches aber nicht der Fall ist. Also kann man davon ausgehen, dass H die alterniernde Gruppe ist.

Literatur

1) O. Bogopolski, „Introduction to group theory“ , European Math. Society Publishing House,2008

2) Skript Schröer , „Algebra SS 2010“

3) Horst Knörrer, „Geometrie“, Vieweg