Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr, 14.12.2012, 12.20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 9

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Wir betrachten die Baumslag-Solitar Gruppe

$$\mathrm{BS}(1,n) = \langle a, b \,|\, a^{-1}ba = b^n \rangle.$$

1) Beweisen Sie, dass $[a^iba^{-i}, a^jba^{-j}] = 1$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ ist. [1 Punkt]

2) Beweisen Sie, dass
$$a^iba^{-i} = (a^{i+k}ba^{-(i+k)})^{n^k}$$
für alle $i \in \mathbb{Z}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. [1 Punkt]

3) Leiten Sie aus 1) und 2) ab, dass jedes Element $g \in \mathrm{BS}(1,n)$ in der Form
$$g = a^{-\ell}b^ta^{\ell} \cdot a^s$$
geschrieben werden kann. [4 Punkte]

4) Sei G die Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, die von folgenden zwei Matrizen erzeugt ist:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Beweisen Sie mit Hilfe von 3), dass für $n \geqslant 2$
$$\varphi : \mathrm{BS}(1,n) \to G, \quad a \mapsto A, b \mapsto B,$$
ein Isomorphismus ist. [4 Punkte]

Aufgabe 2. Sei $G = \langle a, b \,|\, ba^3b^2a^3 \rangle$.

1) Finden Sie $n \in \mathbb{Z}$, so dass für die Präsentation von G in Erzeuger $x = a$, $y = ba^n$
$$G = \langle x, y |\, s(x,y) \rangle$$
gilt: $\sigma_x(s) = 0$. Hier ist $\sigma_x(s)$ die Summe von Potenzen bei x in s. [2 Punkte]

2) Stellen Sie G als eine HNN Erweiterung dar:
$$\langle H, x \,|\, x^{-1}Ax = B \rangle,$$
wobei H, A, B endlich erzeugt sind. [2 Punkte]

3) Mit Hilfe dieser Darstellung beweisen Sie, dass
$$b^3ab^{-3}a^{-1} = 1$$
in der Gruppe G ist. [6 Punkte]

4) Beweisen Sie, dass die Gruppe G nicht abelsch ist. [2 Punkte]

5) Beweisen Sie, dass a und b unendliche Ordnungen in G haben. [2 Punkte]

6) Beweisen Sie, das $b^2ab^{-2}a^{-1} \neq 1$ in G ist. [2 Punkte]