Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr, 2.11.2012, 12.20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Seien $A = \langle a, b^2, bab^{-1}\rangle$ und $B = \langle ab, ba\rangle$ zwei Untergruppen der freien Gruppe $F(a, b)$.

a) Berechnen Sie eine Basis der freien Gruppe $A \cap B$.

b) Finden Sie den Index $|B : (A \cap B)|$.

Aufgabe 2.

a) Sei H Schnitt aller Untergruppen des Index 2 in $F(a, b)$. Beweisen Sie, dass H normal in $F(a, b)$ und dass $F(a, b)/H \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ist.

b) Finden Sie eine Basis einer normalen Untergruppe H in $F(a, b)$ mit $F(a, b)/H \cong \mathbb{Z}_4$.

Aufgabe 3. Sei $1 \neq H$ eine endlich erzeugte Untergruppe einer freien Gruppe $F(X)$. Beweisen Sie: wenn H normal in $F(X)$ ist, dann ist der Index $|F(X) : H|$ endlich.

Hinweis:

1) *Wie sieht* $\widetilde{St(\Gamma_H)}$ *aus, wenn* $|F(X) : H|$ *unendlich ist?*

2) *Sei* $1 \neq h \in H$. *Angenommen* $|F(X) : H| = \infty$, *beweisen Sie, dass ein* $g \in F(X)$ *existiert, so dass den Weg* p *in* $\widetilde{St(\Gamma_H)}$ *mit* $\alpha(p) = v$ *und* $\mathrm{Lab}(p) = ghg^{-1}$ *nicht geschlossen ist.*

Die Differenzierung in $F(X)$ wird am Montag erklärt.

Aufgabe 4. Kalkulieren Sie die folgenden Ableitungen für $n \in \mathbb{N}$:

1) $\dfrac{\partial}{\partial z}(xyz^2x^{-1}y^{-1}z^{-2})$,

2) $\dfrac{\partial}{\partial x}[x^n, y]$,

3) $\dfrac{\partial}{\partial x}[x, y]^n$.

Hier benutzen wir die Bezeichnung $[a, b]$ für $a^{-1}b^{-1}ab$.