Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: Fr, 26.10.2012, 12.20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1.
a) Sei z ein nichttriviales Element einer freien Gruppe F. Mit Hilfe der Nielsen-Transformationen transformieren Sie das Tupel (z^{318}, z^{68}) zu einem Nielsen reduzierten Tupel.
b) Seien x, y zwei Elemente einer freien Gruppe F und sei $xy = yx$.
Beweisen Sie, dass ein $z \in F$ existiert, so dass $x = z^k, y = z^l$ für einige $k, l \in \mathbb{Z}$ ist.

Hinweis zu b). Wie beeinflussen die Nielsen-Transformationen die Eigenschaft $xy = yx$? Benutzen Sie die Behauptung 3.4 des Skripts.

Aufgabe 2. Finden Sie eine Basis irgendeiner Untergruppe des Index 3 in $F(a, b)$.

Aufgabe 3. a) Ist die Untergruppe $U = \langle ab, ba \rangle$ von $F(a, b)$ normal?
b) Ist der Index $|F(a, b) : U|$ endlich?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 4. Finden Sie x, y, z in $F(a, b)$, so dass

$$a^{-1}b^{-1}ab = x^2y^2z^2$$

gilt. Es reicht, wenn Sie eine Lösung finden.

Aufgabe 5. a) Falten Sie den Graph für das Tupel $U = (ab^2a, ababab, a^{-1}b^{-1}abab^2a)$. Um Platz zu sparen, können Sie mehrere Schritte in einen fassen.
b) Finden Sie den Index von $\langle U \rangle$ in $F(a, b)$.