Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe: Fr, 1.02.2013, 12.20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 14

Definition: Eine Darstellung $\rho : G \to \mathrm{Liniso}_K(V, V)$ heißt *exakt*, falls $\mathrm{Ker}\,\rho = 1$ ist.

Aufgabe 1.
1) Finden Sie eine exakte Darstellung $\rho : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Liniso}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.
2) Ist diese Darstellung irreduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$.
1) Finden Sie eine exakte irreduzible Darstellung $\rho : \mathbb{Z}_n \to \mathrm{Liniso}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$.
2) Wie viele irreduzible Darstellungen $\rho : \mathbb{Z}_6 \to \mathrm{Liniso}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ gibt es?
3) Wie viele irreduzible Darstellungen $\rho : \mathbb{Z}_n \to \mathrm{Liniso}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^1)$ gibt es?

Aufgabe 3.
1) Finden Sie eine exakte Darstellung $\rho : \mathrm{GL}_n(K) \to \mathrm{Liniso}_K(K^n, K^n)$.
2) Ist diese Darstellung vollständig reduzibel? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Wir setzen

$$C_G(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}.$$

a) Beweisen Sie, dass $C_G(g)$ eine Untergruppe von G ist. Sie heißt *Zentralisator* von g in G.
b) Beweisen Sie, dass die Anzahl von Elementen von G, die mit g konjugiert sind, gleich $|G : C_G(g)|$ ist.
c) Wie viele Matrizen in $\mathrm{SL}_2(5)$ sind mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

konjugiert?

Hinweis zu b). Betrachte $xgx^{-1} \mapsto xC_G(g)$, $x \in G$.

Aufgabe 5. Sei G eine Gruppe und $H \leqslant G$ eine Untergruppe. Wir setzen

$$N_G(H) = \{x \in G \mid xHx^{-1} = H\}.$$

a) Beweisen Sie, dass $N_G(H)$ eine Untergruppe von G ist. Sie heißt *Normalisator* von H in G.
b) Beweisen Sie, dass die Anzahl von Untergruppen von G, die mit H konjugiert sind, gleich $|G : N_G(H)|$ ist.

Hinweis zu b). Betrachte $xHx^{-1} \mapsto xN_G(H)$, $x \in G$.