Prof. Dr. Oleg Bogopolski　　　　Abgabe: Fr, 18.01.2013, 12.20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 12

Diese Aufgaben sind ein Teil des gegebenen Beweises des Satzes von Jordan – Dickson.

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe mit $G = [G, G]$. Beweisen Sie, dass $G/N = [G/N, G/N]$ für jede normale Untergruppe N von G gilt. [4 Punkte]

Aufgabe 2. Beweisen Sie das Folgende:
1) $\mathrm{PSL}_2(2) \cong S_3$; [6 Punkte]
2) $\mathrm{PSL}_2(3) \cong A_4$; [6 Punkte]
3) S_3 und A_4 sind nicht einfach. [2+4 Punkte]

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und sei $n \geqslant 2$ eine natürliche Zahl. Sei M die Menge von Geraden des Vektorraums K^n, die duch 0 laufen. Beweisen Sie, dass $\mathrm{PSL}_n(K)$ 2-transitiv auf M operiert. [6 Punkte]

Hinweis. Für $0 \neq v \in K^n$ sei L_v die Gerade von K^n, die den Vektor v enthält. Für ein Element $\overline{A} \in \mathrm{PSL}_n(K)$ berechnen Sie $\overline{A} \cdot L_{e_1}$ und $\overline{A} \cdot L_{e_2}$, wobei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ die Standardbasis von K^n ist. Leiten Sie daraus die Behauptung der Aufgabe ab.

Aufgabe 4. Sei B die Untergruppe von $\mathrm{SL}_n(K)$, die aus Matrizen

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * & 0 \\ * & * & \dots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & 0 \\ * & * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}$$

besteht und sei A die Untergruppe von B, die aus Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ * & * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}$$

besteht. Beweisen Sie das Folgende:
1) A ist abelsch; [2 Punkte]
2) A ist normal in B; [2 Punkte]
3) $B/A \cong \mathrm{SL}_{n-1}(K)$. [2 Punkte]

Hinweis zu 2) und 3). Definieren Sie einen Homomorphismus von B nach $\mathrm{SL}_{n-1}(K)$.

Aufgabe 5.

1) Sei $T_{i,j}(\alpha)$ eine beliebige Transvektion aus $\mathrm{GL}_n(K)$. Finden Sie eine Permutationsmatrix $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $P^{-1}T_{n,1}(\alpha)P = T_{i,j}(\alpha)$. [2 Punkte]

2) Beweisen Sie, dass $T_{n,1}(\alpha)$ und $T_{i,j}(\alpha)$ in $\mathrm{SL}_n(K)$ konjugiert sind. [2 Punkte]

3) Sei $G = \mathrm{SL}_n(K)$. Beweisen Sie, dass $G = \langle g^{-1}Ag \mid g \in G \rangle$ ist, wobei A die Gruppe aus der Aufgabe 4 ist. [2 Punkte]