Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 14.12. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 9

Aufgabe 1.
a) Wie viele Untergruppen des Indexes 2 gibt es in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?
b) Wie viele Untergruppen des Indexes 4 gibt es in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

Aufgabe 2. Beweisen Sie den folgenden Satz.
Sei $a \in G$ und seien $b, c \in \gamma_i(G)$. Dann gelten:

1) $[a, bc] = [a, b] \cdot [a, c] \cdot d$ für einen $d \in \gamma_{i+2}(G)$;

2) $[a, c^{-1}] = [a, c]^{-1} \cdot d_1$ für einen $d_1 \in \gamma_{i+2}(G)$.

Aufgabe 3.
a) Seien A, B Gruppen und $\overline{A}$ eine Faktorgruppe von A. Beweisen Sie, dass ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : A \wr B \to \overline{A} \wr B$ existiert.

b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}_2$ nicht nilpotent ist.

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass S_3 polyzyklisch, aber nicht nilpotent ist.

Aufgabe 5.
Sei p eine Primzahl und sei

$$G_p = \{ \begin{pmatrix} 1 & n \cdot p^m \\ 0 & p^k \end{pmatrix} \mid n, m, k \in \mathbb{Z} \}.$$

a) Beweisen Sie, dass G_p eine Gruppe bezüglich der Multiplikation ist.
b) Beweisen Sie, dass G_p von folgenden Matrizen erzeugt ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Prüfen Sie die folgende Gleichung nach:

$$A^{-1} B A = B^p$$

Mit Hilfe dieser Gleichung beweisen Sie, dass G_p nicht nilpotent ist.