Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 7.12. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 8

Definition. Eine Gruppe heißt *torsionsfrei*, falls jedes nichttriviale Element von G die unendliche Ordnung hat.

Aufgabe 1. Es ist bekannt, dass für jede torsionsfreie nilpotente Gruppe G die Gleichung $x^n = y^n$ mit $x, y \in G$ und $n \in \mathbb{N}$ impliziert $x = y$. Leiten Sie daraus ab, dass die Gleichung $x^n y^m = y^m x^n$ mit $x, y \in G$ und $n, m \in \mathbb{N}$ impliziert $xy = yx$.

Aufgabe 2. Sei n eine natürliche Zahl. Betrachten wir die Gruppe

$$G = \begin{pmatrix} 1 & n\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $[G, G]$.
b) Die Gruppe $G/[G, G]$ ist abelsch. Finden Sie $t, k_1, \dots, k_s$, so dass folgendes gilt:

$$G/[G, G] \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{t} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_s}.$$

Aufgabe 3. Sei $M_\omega(K)$ die Menge von unendlichen Matrizen über dem Körper K, deren Zeilen und Spalten mit allen natürlichen Zahlen numeriert sind. Sei $UT_\omega(K)$ die Menge aller Matrizen aus $M_\omega(K)$ mit Einsen auf dem Hauptdiagonal, mit 0 unter dem Hauptdiagonal und mit nur endlich vielen nichtnullschen Zahlen über dem Hauptdiagonal. Diese Menge $UT_\omega(K)$ ist eine Gruppe bezüglich der natürlichen Multiplikation.

Sei p eine Primzahl.

a) Beweisen Sie, dass das Zentrum von $UT_\omega(\mathbb{Z}_p)$ nur die Einheitsmatrix enthält.
b) Beweisen Sie, dass $UT_\omega(\mathbb{Z}_p)$ eine p-Gruppe ist.

Bemerkung. Eine Gruppe G heißt *p-Gruppe*, falls die Ordnungen nicht-trivialer Elementen von G positive Potenzen von p sind.

Aufgabe 4. a) Beweisen Sie, dass alle nilpotenten Untergruppen von A_5 zyklisch oder isomorph $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ sind.
b) Finden Sie die Ordnungen von zyklischen Gruppen in A_5.

Hinweis. Benutzen Sie die den Satz 16.5 von Burnside-Wielandt.

Aufgabe 5. Sei $|G| = m_1 m_2 \cdot \ldots \cdot m_s$, wobei $\mathrm{ggT}(m_i, m_j) = 1$ für alle $i \neq j$ ist. Nehmen wir an, dass $G_1, \dots, G_s$ normale Untergruppen von G der Ordnungen $m_1, \dots, m_s$ sind. Beweisen Sie, dass $G \cong G_1 \times \ldots \times G_s$ ist.

Hinweis. Starten Sie von $s = 2$ und benutzen Sie die Induktion.