Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 16.11. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 5

Aufgabe 1. Finden Sie eine Primzahl p, so dass $\mathbb{Z}_p^*$ nicht von 2 und nicht von 3 erzeugt ist.

Erinnerung. Die Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$ ist die multiplikative Gruppe aller invertierbaren Elemente des Ringes $\mathbb{Z}_n$. In der Vorlesung 9 haben wir angemerkt, dass $\mathbb{Z}_7^*$ nicht von 2, sondern von 3 erzeugt ist.

Aufgabe 2.
a) Sei $A = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_5$. Beschreiben Sie $Aut(A)$.

b) Sei $B = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_3$. Beschreiben Sie alle Homomorphismen $\varphi : B \to Aut(A)$.

c) Sei G eine Gruppe der Ordnung 15. Beweisen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}_{15}$ ist.

Hinweis. Nach Sylow-Satz existieren zwei Untergruppen $A, B \in G$ mit $|A| = 5$ und $|B| = 3$. Zuerst beweisen Sie, dass $A \trianglelefteq G$ ist (benutzen Sie Poincare-Satz). Danach beweisen Sie dass $G = A \rtimes B$ ist und schlißlich benutzen Sie Satz 10.3 (Punkte 4 und 1).

Aufgabe 3.
a) Beweisen Sie ausführlich, dass $Aut(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^*$ ist.
b) Beweisen Sie, dass $Aut(\mathbb{Z}_9) \cong \mathbb{Z}_6$ ist.

Aufgabe 4. Sei D_n die Symmetriegruppe eines regulären n-Ecks. Diese Gruppe enthält n Drehungen und n Spigelungen.
a) Beweisen Sie, dass $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ ist.
b) Beweisen Sie, dass $D_3 \cong S_3$ ist.
c) Wie viel Konjugationsklassen enthält D_4?
d) Wie viel Konjugationsklassen enthält D_5?
e) Wie viel Konjugationsklassen enthält D_n?

Die Antworten in c)-e) müssen begründet werden.

Definition. Zwei Elemente einer Gruppe liegen in einer Konjugationsklasse falls sie konjugiert sind.