Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 9.11. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 4

Aufgabe 1. Die Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$ ist die multiplikative Gruppe aller invertierbaren Elemente des Ringes $\mathbb{Z}_n$. Sei G die Untergruppe von $\mathbb{Z}_{30}^*$, die von 7 erzeugt ist.

a) Wie viele Elemente G hat?

b) Die Gruppe G operiert auf der Menge $\mathbb{Z}_{30}^*$ durch Multiplikation. Finden Sie alle Orbits.

c) Die Gruppe G operiert auf der Menge $\mathbb{Z}_{30}$ durch Multiplikation. Finden Sie alle Orbits.

Aufgabe 2. Man hat unbeschränkte Mengen von roten und gelben Perlen. Wie viele Halsketten können aus 8 Perlen gemacht werden?

Hinweis: Man betrachtet die Halsketten in $\mathbb{R}^3$. Wenden Sie den Burnside-Satz an.

Aufgabe 3. Finden Sie in S_4 eine Untergruppe der Ordnung 8.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass die Rotationsgruppe des Würfels S_4 isomorph ist.

Hinweis: Es gibt 4 lange Strecken in dem Würfel.

Aufgabe 5.

a) Sei G eine Gruppe und $g \in G$. Setzen wir $C(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$. Beweisen Sie, dass $C(g)$ eine Untergruppe von G ist. (Sie heißt *Zentralisator* von g in G.)

b) Beweisen Sie, dass die Anzahl von Elementen von G, die mit g konjugiert sind, gleich $|G : C(g)|$ ist.

c) Wie viele Matrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ sind mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

konjugiert? Here ist $\mathbb{F}_5$ ein Körper mit 5 Elementen und $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5)$ ist die Gruppe aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_5$ mit der Determinante 1.