Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 26.10. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 2

Aufgabe 1. Sei $G = A \rtimes B$ eine endliche Gruppe. Beweisen Sie, dass $|G| = |A| \cdot |B|$ ist.

Aufgabe 2.
a) Sei $n \geqslant 2$. Finden Sie eine Untergruppe $B \leqslant S_n$, so dass $S_n = A_n \rtimes B$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
b) Beweisen Sie, dass $S_4 = K \rtimes S_3$ ist, wobei $K = \{id, (12)(34), (13)(24), (23)(14)\}$ ist.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie, dass $A \wr B = \mathrm{Fun}(B, A)' \rtimes B'$ ist.
(Siehe die Bezeichnungen in der Vorlesung 4).

Aufgabe 4.
Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_3 \ncong S_4$ ist.
Hinweis: Welche Struktur hat die Gruppe $\mathrm{Fun}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2)$?

Aufgabe 5.
Beweisen Sie, dass das direkte Kranzprodukt $A \wr B$ nicht abelsch für $A \neq 1$, $B \neq 1$ ist.

Aufgabe 6. Das Zentrum einer Gruppe G wird so definiert:

$$Z(G) := \{g \in G \,|\, gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

a) Beweisen Sie, dass $Z(G)$ eine Untergruppe von G ist.
b) Berechnen Sie $Z(A \,\bar{\wr}\, B)$, wobei $A = \{e_1, a\} \cong \mathbb{Z}_2$ und $B = \{e_2, b\} \cong \mathbb{Z}_2$ sind.
c) Beweisen Sie, dass $Z(A \wr B) = \{e\}$ ist, falls B unendlich und $A \neq \{e\}$ ist.