Prof. Dr. Oleg Bogopolski Abgabe: 25.01.2012 um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 13

Ein Element g einer freien Gruppe F heißt *primitiv*, falls g bis zu einer Basis von F ergänzt werden kann.

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass in der freien Gruppe $F(a, b)$
1) $a^5b^{-1}a^8$ ein primitives Element ist,
2) $ababa$ ein primitives Element ist,
3) a^2 kein primitives Element ist,
4) $a^{-1}b^{-1}ab$ kein primitives Element ist.

Aufgabe 2. Stellen Sie die Transposition

$$(u_1, u_2) \to (u_2, u_1)$$

als Komposition von nicht mehr als 6 Nielsen-Transformationen dar.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ die Präsentation $\langle a, b \,|\, a^{-1}b^{-1}ab \rangle$ hat.

Aufgabe 4. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_3$ folgende Präsentationen hat:
a) $\langle x \,|\, x^3 \rangle$
b) $\langle x, y \,|\, x^{-5}y^2,\, x^6y^{-3} \rangle$.

Aufgabe 5.
a) Sei z ein nichtriviales Element einer freien Gruppe F. Mit Hilfe der Nielsen-Transformationen transformieren Sie das Tupel (z^{318}, z^{68}) zu einem Nielsen reduzierten Tupel.
b) Seien a, b zwei Elemente einer freien Gruppe F und sei $ab = ba$.
Beweisen Sie, dass ein $z \in F$ existiert, so dass $a = z^k, b = z^l$ für einige $k, l \in \mathbb{Z}$ ist.

Hinweis zu b). Wie beeinflussen die Nielsen-Transformationen (T1)-(T2) die Eigenschaft $ab = ba$? Benutzen Sie die Behauptung 25.1 des Skripts.