Prof. Dr. Oleg Bogopolski — Abgabe: 21.12. um 14:20 Uhr

Gruppentheorie
Übungsblatt 10

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Kommutatoren-Reihe $G \geqslant G^{(1)} \geqslant G^{(2)} \geqslant \dots$ für die Gruppe $G = S_4$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Kommutatoren-Reihe für die Gruppe

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q}^* \end{pmatrix}.$$

Hier ist $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 3.

a) Sei $G = A \wr B$, wobei B unendlich und $A \neq 1$ ist. Beweisen Sie, dass die Untergruppe $\mathrm{fun}(B, A)$ von G nicht endlich erzeugt werden kann. Leiten Sie daraus ab, dass G nicht polyzyklisch ist.

b) Sei $G = A \wr B$, wobei A und B auflösbar sind.

  b1) Beweisen Sie, dass $\mathrm{fun}(B, A)$ auflösbar ist.

  b2) Beweisen Sie, dass G auflösbar ist.

Hinweis:

a) Um zu zeigen, dass G nicht polyzyklisch ist, benutzen Sie den Satz 17.2 des Skriptes.

b) Um zu zeigen, dass G auflösbar ist, benutzen Sie den Satz 19.5.2) des Skriptes.

Aufgabe 4.
a) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 72 nicht einfach ist.
b) Beweisen Sie, das jede Gruppe der Ordnung 72 polyzyklisch ist.

Hinweis:

a) Berechnen Sie die möglichen Indizes des Normalisators einer 3-Sylow-Untergruppe. Dann wenden Sie den Poincare-Satz an (Siehe Satz 7.3 des Skriptes).

b) Benutzen Sie den Punkt a), Sätze 17.2.3) und 19.10.a) des Skriptes.

Bemerkung. Sie dürfen b) lösen, sogar wenn Sie a) nicht gelöst haben.

Aufgabe 5. Beweisen Sie, dass jede auflösbare Gruppe der Ordnung 60 eine Untergruppe enthält, die isomorph $\mathbb{Z}_{15}$ ist.

Hinweis. Benutzen Sie den Satz von Carter (siehe Satz 19.7 des Skriptes). Danach benutzen Sie den Satz von Sylow.