

Gruppentheorie

Übungsblatt 0

Aufgabe 1. Beweisen Sie dass die Gruppe A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 besitzt. (A_n ist die Gruppe aller geraden Permutationen der Symbole $1, 2, \dots, n$.)

Aufgabe 2. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $35x = 5$ in \mathbb{Z}_{25} .

Aufgabe 3. Seien m, n natürliche Zahlen und sei $k \in \mathbb{Z}_n$.

- Wie viele Lösungen die Gleichung $mx = k$ in \mathbb{Z}_n hat?
- Wie viele Elementen der Ordnung m in \mathbb{Z}_n gibt es?

Aufgabe 4. Sei $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$.

- Wie viele Untergruppen $A \cong \mathbb{Z}_4$ in G gibt es?
- Finden Sie eine andere Zerlegung $G = A \oplus B$.

Aufgabe 5. Sei A eine Untergruppe von $G = \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$.

- Beweisen Sie, dass aus $A \cong \mathbb{Z}_n$ folgt $G/A \cong \mathbb{Z}_n$.
- Beweisen Sie, dass aus $G/A \cong \mathbb{Z}_n$ folgt $A \cong \mathbb{Z}_n$.

Aufgabe 6.

Sei F eine freie abelsche Gruppe mit der Basis f_1, f_2, f_3 und sei A die Untergruppe von F , die von

$$\begin{aligned}a_1 &= 2f_1 + f_2 + f_3, \\a_2 &= 4f_1 + 4f_2 + f_3, \\a_3 &= f_2 + 2f_3,\end{aligned}$$

erzeugt ist.

a) Finden Sie eine Basis f'_1, f'_2, f'_3 von F und eine Basis a'_1, \dots, a'_k von A , so dass $a'_i = m_i f'_i$ mit $m_i \in \mathbb{N}$ für $i = 1, \dots, k$ ist.

b) Zerlegen Sie F/A in die direkte Summe von endlichen und unendlichen zyklischen Gruppen.