Eigenschaften von Resultanten

Satz. Seien $f(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$ und $g(x) = b_0x^m + \cdots + b_m$ zwei Polynome. Dann:

1) Es existieren Polynome $G(x)$ und $F(x)$, so dass $\mathrm{Grad}(G) < m, \mathrm{Grad}(F) < n$ ist und
$$\mathrm{Res}(f,g) = fG + gF$$
gilt.

2) $\mathrm{Res}(f,g) = 0 \iff f,g$ einen gemeisamen Faktor haben, der von x abhängt oder $a_0 = b_0 = 0$ ist.

3) $\mathrm{Res}(f,g)$ ist als eine Funktion von $a_0,\dots,a_n$ homogen von Grad m und ist als eine Funktion von $b_0,\dots,b_m$ homogen von Grad n.

4) Seien $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ Nullstellen von $f(x)$ und seien $\beta_1,\dots,\beta_m$ Nullstellen von $g(x)$. Dann gilt
$$\mathrm{Res}(f,g) = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_0^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) = a_0^m b_0^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j).$$

Beweis von 4). Sei y eine Unbekannte. Dann ist $g(x) - y = b_0x^m + \cdots + b_{m-1}x + (b_m - y)$ und so ist $\mathrm{Res}(f(x), g(x) - y)$ ein Polynom von y (siehe Definition von Resultant). Wir bezeichnen
$$R(y) = \mathrm{Res}(f(x), g(x) - y). \tag{1}$$
Setzen wir $y_i = g(\alpha_i)$, wobei α_i eine Nullstelle von $f(x)$ ist, $i = 1,\dots,n$. Dann gilt
$$R(y_i) = \mathrm{Res}(f(x), g(x) - g(\alpha_i)).$$
Die Polynome $f(x)$ und $g(x) - g(\alpha_i)$ haben eine gemeinsame Nullstelle $x = \alpha_i$, also sie haben einen gemeinsamen Faktor $x - \alpha_i$. Aus 2) folgt dann $R(y_i) = 0$. Dann ist $(y - y_i)$ ein Teiler von $R(y)$.

Fall 1. Sei $y_1,\dots,y_n$ verschieden. Dann ist $\prod_{i=1}^n (y - y_i)$ ein Teiler von $R(y)$. Wenn man die Definition von $R(y)$ mit Achtung analysiert, stellt man fest, dass das Polynom $R(y)$ Grad n und die Hauptkoeffiziente $(-1)^n a_0^m$ hat. Deswegen gilt
$$R(y) = (-1)^n a_0^m \prod_{i=1}^n (y - y_i).$$
Setzen wir $y = 0$, erhalten wir
$$\mathrm{Res}(f(x), g(x)) \overset{(1)}{=} R(0) = a_0^m \prod_{i=1}^n y_i = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i).$$

Fall 2. Sei $y_1,\dots,y_n$ nicht unbedingt verschieden. Wir skizzieren eine Idee. Betrachten wir $\alpha_1',\dots,\alpha_n'$, so dass α_i' nah zu α_i ist und $y_1',\dots,y_n'$ verschieden sind (hier, wie oben, $y_i' = g(\alpha_i')$).

Dann sind die Koeffizienten von $\Phi(x) = a_0 \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i')$ nah zu Koeffizienten von $f(x) = a_0 \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ und so ist $\mathrm{Res}(\Phi(x), g(x))$ nah zu $\mathrm{Res}(f(x), g(x))$. Nach Fall 1 gilt $\mathrm{Res}(\Phi(x), g(x)) = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i')$. Streben wir $\alpha_i' \to \alpha_i$, erhalten wir
$$\mathrm{Res}(f(x), g(x)) = a_0^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i).$$
□