**Proseminar zur linearen Algebra**
Veranstalter: Prof. Bogopolski
TU-Dortmund

Proseminarbeitrag von Daniela Kreft
Studiengang: Mathematik(Diplom)

Thema:

# Orthogonale und unitäre Matrizen

# Orthogonale und unitäre Matrizen

**Für lineare Abbildungen gilt:**

**Definition 1:**
Eine lineare Abbildung f : U → V, über euklidischen Räumen, ist eine ***orthogonale Abbildung*** oder ***orthogonale Transformation*** wenn gilt:

$\| fx \| = \| x \|$ , für alle $x \in U$ .

Ebenso gilt, dass eine normerhaltende Transformation über unitären Räumen ***unitär*** ist.

**Andere Definition:**
Eine lineare Abbildung f : U → V wird ***orthogonal*** genannt, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad .$$

Auf einem unitären Vektorraum heißt eine solche Abbildung ***unitär***.

**Für Matrizen gilt:**

**Definition 2:**
Eine Matrix heißt ***unitär***, wenn gilt:

$$AA^H = I \qquad (1)$$

wobei gilt $A^H = \bar{A}^T$ (dh. dem komplex kojugierten Transponierten entspricht).

Eine lineare Abbildung aus einem unitären Raum in sich selbst ist unitär, wenn ihre Matrix, bezüglich einer orthogonalen Basis, unitär ist.
Mit (1) erkennt man, dass A invertierbar ist und $A^H$ ihre Inverse Matrix ist.

Eine reelle unitäre Matrix erfüllt $AA^T = I$ . (2)
Eine solche Matrix nennt man ***orthogonal***, und zwar so, dass eine lineare Abbildung aus einem euklidischen Raum in sich selbst orthogonal ist, wenn ihre Darstellungsmatrix bezüglich einer Orthonormalbasis orthogonal ist.

Somit können wir folgende Zusammenfassung anfertigen:
Äquivalent sind:

- f ist unitär
- $A^H A = I$
- $AA^H = I$
- $A \bar{A}^T = I$
- $A^T \bar{A} = I$

- f ist orthogonal
- $AA^T = I$
- $A^T A = I$

Formal können wir euklidische Räume und orthogonale Transformationen als Sonderfall der unitären Situation betrachtren, bei dem der zugrundeliegende Körper reell ist.
Hierfür gilt, dass die komplexe Konjugation auf die Identität beschränkt wird.

***<u>Satz 1:</u>***
***Die unitäre n×n- Matrizen mit Koeffizienten aus*** $\mathbb{C}$ ***bilden eine Gruppe, genannt*** ***<u>unitäre Gruppe</u> :*** $U_n(\mathbb{C})=\{A\in\mathbb{C} : A^{-1}=\bar{A}^T\}$

***<u>Satz 2:</u>***
***Die orthogonalen n×n- Matrizen mit Koeffizienten aus einem Körper F bilden eine Gruppe, genannt <u>orthogonale Gruppe</u> :*** $O_n(F)=\{A\in F^{n\times n} : A^{-1}=A^T\}$

**<u>Satz 3:</u>**
***Jede unitäre Matrix hat Determinante*** $|1|$ **.**
***Insbesondere hat jede orthogonale Matrix Determinante*** $\pm 1$ **.**

Beweis:
<u>Nur für den Fall, dass A reell (also orthogonal):</u>
$1=\det I=\det AA^T=\det A.\det A^T=\det A.\det A=(\det A)^2$
Das zeihen der Quadratwurzel liefert die Behauptung.

■

<u>Bemerkung:</u>
Eine zu einem Objekt assoziierte Größe, welche sich bei einer passenden Klasse von Modifikationen des Objekts nicht ändert nennt man ***<u>Invariante</u>***.

<u>Beispiele:</u>
- Die Dimension eines Vektorraums ist eine (Isomorphie-) Invariante, dh. , wenn V und W isomorphe Vektorräume sind, so stimmen ihre Dimensionen überein.
- Die Determinante einer Matrix ist eine (Ähnlichkeits-) Invariante, dh., wenn A und B Matrizen sind und es gilt $B=SAS^{-1}$ (vorausgesetzt S existiert) so haben A und B die gleiche Determinante.

**Wir werden herausfinden, dass jede hermitsche Abbildung auf einem unitären Raum diagonalisiert werden kann mit Invarianten der gegebenen Form auf der Diagonalen, und zwar mit unitärer Transformation.**

# Diagonalisieren von hermitschen Formen

**Definition 3:**
Eine lineare Abbildung aus einem unitären Raum in sich selbst welche (3) erfüllt nennt man ***hermitesch*** oder ***selbstadjungiert***.

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \text{ , für alle } x, y \in V \quad . \tag{3}$$

In Matrixschreibweise heißt dies nicht anderes als dass die Matrix A seinem komplex konjugierten und transponierten entspricht, also $A = \bar{A}^T = A^H$ . (4)

Eine lineare Abbildung aus einem unitären Raum ist selbstadjungiert, falls ihre Matrix (bezüglich einer Orthonormalbasis) hermitesch ist.

**Definition 4:**
Sei A eine n $\times$ n- Matrix über einem Körper K. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt ***Eigenwert*** von A, wenn es einen Zeilenvektor $x \in K^n$ gibt mit:

(i) $x \neq 0$ (ii) $xA = \lambda x$ . (5)

Jedes solche x heißt dann ***Eigenvektor*** von A zum Eigenwert $\lambda$ .

Unter dem ***charakteristischen Polynom von A*** in $K^{nxn}$ verstehen wir das Polynom

$$det(\lambda I - A) \quad . \tag{6}$$

Dies ist ein normiertes Polynom von Grad n in λ; offensichtlich können wir es für jede quadratische Matrix erhalten und prüfen, welche nicht notwendigerweise hermitesch ist.

Definiere $V_c = \{x \in \mathbb{C}^n \mid xA = cx\}$ ,
dann kann man leicht zeigen, dass $V_c$ eine Untergruppe von V ist. Man nennt Diese Menge den ***Eigenraum*** von c.

**Bemerkung:**
Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt ***Eigenwert*** von der linearen Abbildung f, wenn es einen Vektor $x \in K^n$ gibt mit:

(ii) $x \neq 0$ (ii) $f(x) = \lambda x$ . (5*)

Jedes solche x heißt dann ***Eigenvektor*** von A zum Eigenwert $\lambda$ .

**Lemma 1:**
***Die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix A sind alle reel;***
***genauer, das charakteristische Polynom einer hermitschen n $\times$ n – Matrix lässt sich mit n reellen Linearfaktoren schreiben.***

**Beweis**
Nach dem Fundamentalsatz der linearen Algebra wissen wir, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist und, dass jedes Polynom n-ten Grades, in x , in n Linearfaktoren $x-\lambda_i$ zerfällt, wobei $\lambda_i$ die Nullstellen des gegebenen Polynoms darstellen.

Somit gilt: Wenn die Eigenwerte reell sind, zerfällt auch das Charakteristische Polynom in n reelle Linearfaktoren.

Sei c ein Eigenwert von A (evtl. komplex) und u ein von Null verschiedener Eigenvektor,
dann gilt $uA=cu$ ,
und multiplizieren mit $u^H=\bar{u}^T$ liefert $uAu^H=cuu^H$ .

Nun gilt $uu^H=u\,\bar{u}^T=(u_1,\ldots,u_n)\begin{pmatrix}\bar{u}_1\\ \vdots\\ \bar{u}_n\end{pmatrix}=u_1\bar{u}_1+\ldots+u_n\bar{u}_n=\sum|u_i|^2>0$ , da $u\neq 0$ ,

und $\overline{uAu^H}=(\overline{uAu^H})^T=(uAu^H)^H=(u^H)^H A^H u^H=uA^H u^H=uAu^H$ da $A^H=A$ .
Dies zeigt, dass $uAu^H$ reell ist.

$$uAu^H=cuu^H \quad |(uu^H)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow uAu^H(uu^H)^{-1}=cuu^H(uu^H)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow uAu^H(uu^H)^{-1}=c$$

Somit gilt, da $uAu^H\, und\ (uu^H)^{-1}\, reell\, sind$ , dass c reell ist.

■

**Lemma 2:**
***Zwei Eigenvektoren einer hermitschen Matrix A, bezüglich zwei verschiedener Eigenwerte, sind orthogonal.***

**Beweis:**
Seien c, d zwei Eigenwerte von A, u Eigenvektor bezüglich c und v Eigenvektor bezüglich d.
Wegen (5) gilt dann: 1.) $uA=cu$ , 2.) $vA=dv$ ,
dann liefert die Gleichung 2.): $(vA)^T=(dv)^T\Leftrightarrow(v\bar{A})^T=(d\bar{v})^T\Leftrightarrow Av^H=dv^H$ .
Multipliziert man nun diese Gleichung mit u von der linken Seite erhällt man $uAv^H=duv^H$ .
Falls man die erste Gleichung mit $v^H$ von der rechten Seite multipliziert erhällt man $uAv^H=cuv^H$ .

Der Vergleich der entstandenen neuen Gleichungen zeigt:

$$uAv^H=duv^H \quad |(-1)$$
$$uAv^H=cuv^H$$
$$0=(c-d)uv^H$$

Demzufolge gilt wenn $c\neq d$ immer $uv^H=0$ , also sind u und v orthogonal .

■

**Lemma 3:**
**Der Eigenraum, bezüglich eines festen Eigenwertes c, hat Dimension, welche der Vielfachheit von c als Nullstelle des charakteristischen Polynoms entspricht.**
***Das heißt:*** $\dim V_c = m$ ***,wenn c m-fache Nullstelle ist.***

**Beweisidee:**
Sei $V_c = \{x \in \mathbb{C}^n \mid xA = cx\}$ ***Eigenraum*** von c.

1 Schritt: Definiere folgende Abbildung: $\phi : V \to V \text{ mit } v \to vA$ .
Dann gilt, dass A Darstellungsmatrix von $\phi$ ist bezüglich der Basis E.

2. Schritt: Zeige, dass die Abbildung $\phi$ auf $V_c$ und seinem orthogonalen Komplement U operiert .

Falls $xA = cx$ , dann gilt $\phi(x)A = c\phi(x) \Leftrightarrow (xA)A = c(xA)$ , deshalb bildet $V_c$ in sich selber ab durch A.
Sei U das orthogonale Komplement zu $V_c$: $U = V_c^{\perp} = \{y \in \mathbb{C}^n | \text{Für alle } x \in V_c \text{ gilt } xy^H = 0\}$ ,

$$\mathbb{C}^n = U \oplus V_c \quad ; \qquad (7)$$

Wir behaupten, dass A auch U in sich selbst abbildet:
Gegeben sei $y \in U$ , dann gilt $xy^H = 0$ für alle $x \in V_c$ , deswegen gilt
$x(yA)^H = xA^H y^H = cxy^H = 0$ und somit $yA \in U$ .

3.Schritt: Zeige, dass die Eigenvektoren aus $V_c$ nicht in U liegen können.

4 Schritt: Verwende: Falls gilt $\mathbb{C}^n = V_c \oplus U$ dann ist $Ch_\phi(\lambda) = Ch_{\phi|V_c}(\lambda) . Ch_{\phi|U}(\lambda)$ .

**Theorem 1:** ***(Transformation zur Hauptachsenform)***
***Sei A eine hermitesche Matrix; dann existiert eine unitäre Matrix T so, dass***

$$TAT^H = \Lambda \quad , \qquad (8)$$

***wobei Λ die Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten ( bezüglich ihrer Vielfachheit) auf der Diagonalen.***

***Im Reellen Fall ist A symmetrisch und man kann man die Gleichung (8) schreiben als***

$$TAT^T = \Lambda \quad . \qquad (9)$$

Beweis:
Vorgehen:
1.) Finde Orthonormalbasis E* von V , sodass die Darstellungsmatrix von A Diagonalgestallt hat.
2.) Zeige dass die Transformationsmatrix T unitär ist.

Zu 1.)
Sei $Ch(\lambda)=det(\lambda I-A)=(\lambda-c_1)^{k_1}...(\lambda-c_r)^{k_n}$ , mit $c_1,.....,c_r\in\mathbb{R}$ Eigenwerte von A , und $V_{c_i}=\{x\in\mathbb{C}^n \mid xA=cx\}$ .
Wir wissen: $dim\, V_{c_i}=k_i$ *und* $V_{c_i}$ *ist orthogonal zu* $V_{c_j}$ .
Somit gilt $V=V_{c_1}\oplus...\oplus V_{c_r}$ .
Finde nun Basen, welche man zum Beispiel mit dem Gram-Schmidt-Verfahren orthonormieren kann, und dies sei dann unsere gesuchte Orthonormalbasis E* .

Falls T die Matrix ist mit diesen Vektoren als Zeilen, dann würde gelten $TAT^H=\Lambda$ , wobei Λ die Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten als Diagonaleinträge von A (bezüglich der passenden Vielfachheit) auf der Hauptdiagonalen.

Zu2.)
Sei $V=\mathbb{C}^n$ ein Raum mit skalarer Multiplikation.
Dann gilt für $(c_1,...,c_r)\in V$ *und* $(c'_1,...,c'_r)\in V$ *mit den Einzelnen* $c_i, c'_i\in\mathbb{C}$ :

$$\langle(c_1,...,c_r),(c'_1,...,c'_r)\rangle=c_1\bar{c'}_1+...+c_r\bar{c'}_r \quad .$$

Weiter seien E ( $e_1,...,e_n$ ) und E' ( $e'_1,...,e'_n$ )zwei Orthonormalbasen von V mit Übergangsmatrix T, das heißt
E'=ET
also

$$\begin{aligned} e'_1&=t_{11}e_1+...+t_{1n}e_n\\ &\vdots \\ e'_n&=t_{n1}e_1+...+t_{nn}e_n \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\langle e'_i,e'_j\rangle=\langle t_{i1}e_1+...+t_{in}e_n,t_{j1}e_1+...+t_{jn}e_n\rangle=t_{i1}\bar{t}_{j1}\langle e_1,e_1\rangle+...+t_{in}\bar{t}_{jn}\langle e_n,e_n\rangle=t_{i1}\bar{t}_{j1}+...+t_{in}\bar{t}_{jn}$$

da gilt $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ .
Ebenso gilt: $\langle e'_i,e'_j\rangle=\delta_{ij}$ .
Das heißt also abschließend:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{n1} & \cdots & t_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{t}_{11} & \cdots & \bar{t}_{n1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{t}_{1n} & \cdots & \bar{t}_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix} \quad \text{also} \quad TT^H=I$$

Somit haben wir eine unitäre Matrix welche 1.) erfüllt.

■

**<u>Definition 5:</u>**
Die Gruppe aus Eigenvektoren einer linearen Abbildung wird ***<u>Spektrum</u>*** genannt.

**<u>Theorem 1':</u>** ***(Spektralsatz)***
***Sei f eine selbstadjungierte Abbildung auf einem unitären Raum V, mit den unterschiedlichen Eigenwerten*** $\lambda_1,...,\lambda_r$ ***und den dazugehörigen Eigenräumen*** $V_1,...,V_r$ ***. Dann gilt***

$$V=V_1\, plus ....\, plus\, V_r \quad ,$$

***Vektoren und den verschiedenen*** $V_i$ ***'s sind orthogonal und*** $dim\, V_i$ ***ist ein Vielfaches von*** $\lambda_i$ ***.*** ■

**<u>Theorem 2:</u>** ***(Quadratwurzel - Lemma)***
***Sei A eine positiv-semidefinite hermitesche Matrix. Dann existiert genau eine positiv-semidefinite hermitesche Matrix B mit*** $A = B^2$ **.**

**<u>Beweis:</u>**
Nach Theorem 1 wissen wir, dass wir zu jeder hermiteschen Matrix A eine unitäre Transformationsmatrix U finden können damit gilt: $UAU^H = D$ (D ist Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A auf der Diagonalen).

Somit gilt: $UAU^H = D$
D ist ebenfalls positiv semidefinit, da gilt, dass die Eigenwerte einer positiv-semidefiniten Matrix größer gleich Null sind.
Also $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ mit $d_1, \dots, d_n \geqslant 0$ . Sei nun $D_1 = \sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$ dann gilt:

$A = U^{-1} D (U^H)^{-1} = U^H D U$ , da $U^{-1} = U^H$ .
Nun sei B definiert wie folgt: $B := U^H D_1 U$ .

Dann gilt $B^2 = U^H D_1 U . U^H D_1 U = U^H D U = A$ , da $U U^H = E$ und $D_1 E D_1 = D$ .
Also kurz $B^2 = A$ .

■

**Aus Theorem 1 kann man leicht ein scheinbar viel allgemeineres Resultat über die simultane Reduktion zweier hermitescher Matrizen herleiten:**

# Simultane Diagonalisierung

**Korollar:**
Seien A und B zwei hermitesche Matrizen, von denen eine, sagen wir A, positiv definit ist. Dann existiert eine unitäre Matrix Q so, dass

$$QAQ^H = I\,, \qquad QBQ^H = \Lambda \quad . \tag{10}$$

**Wir gehen folgendermaßen vor:**
0.Schritt: Prüfe ob A positiv definit ist.

1.Schritt: Diagonalisiere A mit Theorem 1 und, da wir die Kongruenz von A zu I erhalten wollen , dh $UAU^H = I$ mit $U = T_1 K$ ,finde eine Matrix K welche diese Gleichung erfüllt.

2. Schritt: Diagonalisiere B und versuche die gewünschte Form zu erhalten, indem man die Übergangsmatrix aus Schritt 1 auch auf B anwendet: $B \rightarrow T_1 A T_1{}^H = B_1$ .
Dann wende K (von oben) auf $B_1$ an : $B_1 \rightarrow KB_1 K^H = B_2$ .
Um nun endlich die Darstellung $QBQ^H = \Lambda$ zu erhalten, wende Theorem 1 auf die Matrix $B_2$ an. Dann ist die gesuchte Matrix $Q = T_2 K T_1$ .

Somit ist Λ eine Diagonalmatrix ist mit den Nullstellen folgender Gleichung als Diagonaleinträge

$$det(xI - B_2) = 0 \quad . \tag{11}$$

Zusammengefasst haben wir folgende Schritte unternommen um die Form (13) zu erhalten:

$$A \rightarrow T_1 A T_1{}^H = D_1 \rightarrow KD_1 K^H = I$$

$$B \rightarrow T_1 B T_1{}^H = B_1 \rightarrow KB_1 K^H = B_2 \rightarrow T_2 B_2 T_2{}^H = D_2 = \Lambda$$

.

■

**Beispiel** (reeller Fall)

Finde eine eine Matrix Q welche A und B simultan diagonalisiert mit

$$QAQ^H = I, \qquad QBQ^H = \Lambda \quad .$$

Gegeben $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ .

**0.Schritt: Prüfe ob A positiv definit ist**

Betrachte dafür die Unterdeterminanten:

$det(5) > 0, \quad det(A) = 25 - 9 = 16 > 0$ . Also ist A pos. definit.

**1.Schritt: Diagonalisiere A mit Theorem 1**

1.1 Charakteristisches Polynom/ Eigenwerte:

$$Ch_A(X) = det(XI - A) = \begin{vmatrix} 5-X & -3 \\ -3 & 5-X \end{vmatrix} = ... = (X-2)(X-8)$$

Somit sind die Eigenwerte 2 und 8.

1.2 Eigenräume/ Eigenvektoren:

$$V_2 = Kern(A - 2\mathrm{I}) = Kern\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = Kern\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt $V_2 = sp((1,1))$ .

Normieren liefert: $V_2 = sp(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right))$

$$V_8 = Kern(A - 8\mathrm{I}) = Kern\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = Kern\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit gilt . $V_8 = sp((-1, 1))$

Normieren liefert: $V_8 = sp(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right))$

1.3 Transformationsmatrix und ihre Inverse bestimmten:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{Dann gilt:} \quad T_1^{\,T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad .$$

1.4 Diagonalmatrix bestimmen:

$$D_1 = T_1 A T_1^{\,T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

1.5 Transformiere $D_1$ zur Einheitsmatrix:

Behauptung: $K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Probe: $KD_1K^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Also erfüllt die Matrix $Q_1=KT_1$ die Bedingung für A mit $Q_1AQ_1^T=I$

**2. Schritt: Diagonalisiere B und versuche die gewünschte Form zu erhalten**

2.1 B transformieren mit $T_1$ :

$$B_1=T_1BT_1^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 3 & 11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\ 8 & 0\end{pmatrix}$$

2.2 Wende K auf $B_1$ an:

$$B_2=KB_1K^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 8\\ 8 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

2.3 Schritte1.1 bis 1.4 für $B_2$ :

1.1 und 1.2 Eigenwerte,Eigenvektoren,Eigenräume:

$$Ch_{B_2}(X)=det(XI-B_2)=\begin{vmatrix}3-X & 2\\ 2 & 0-X\end{vmatrix}=...=(X-4)(X+1)$$

Somit sind die Eigenwerte 4 und -1.

$$V_4=Kern(B_2-4\mathrm{I})=Kern\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}=Kern\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

Somit gilt $V_4=sp((2,1))$ .

Normieren liefert: $V_4=sp(\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right))$

$$V_{-1}=Kern(B_2+I)=Kern\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=Kern\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Somit gilt . $V_{-1}=sp((1,-2))$

Normieren liefert: $V_{-1}=sp(\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right))$

1.3 Transformationsmatrix und ihre Inverse bestimmten:

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad \text{Dann gilt:} \quad T_2^{\,T} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

1.4 Diagonalmatrix bestimmen:

$$D_2 = T_2 A T_2^{\,T} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Lambda$$

Nun haben wir die gewünschte Form:

$$A \rightarrow T_1 A T_1^{\,T} = D_1 \rightarrow K D_1 K^T = I$$

$$B \rightarrow T_1 B T_1^{\,T} = B_1 \rightarrow K B_1 K^T = B_2 \rightarrow T_2 B_2 T_2^{\,T} = D_2 = \Lambda$$

Sei unser geduchtes Q also : $Q = T_2 K T_1$ .

Somit haben wir: $QAQ^T = I$ , $QBQ^T = \Lambda$ .

# Alternierende Bilinearformen

**Definition 6:**
Seien V und W Vektorräume über dem Körper K dann gilt:

Eine Funktion $g: V \times W \to K$ heißt ***Bilinearform***, wenn sie in jedem Argument linear ist, das heißt, wenn sie folgende Regeln erfüllt:

(i) $g(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 g(v_1, w) + \alpha_2 g(v_2, w)$

(ii) $g(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 g(v, w_1) + \alpha_2 g(v, w_2)$

Im Fall V=W heißt g Bilinearform auf V.

Eine Bilinearform g auf einem Vektorraum V wird ***alternierend*** genannt, falls gilt

$$g(x, x) = 0 \quad , \textit{für alle}\, x \in V \quad . \tag{12}$$

Eine Bilinearform g ist ***antisymmetrisch***, wenn gilt $g(x, y) = -g(y, x)$ . (13)

**Für Matrizen gilt:**

Bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, wird eine alternierende Form g genau durch ihre Matrix $A = (a_{ij})$ augedrückt, wobei $a_{ij} = g(v_i, v_j)$ .
Mit (12) und (13) sehen wir, dass gilt $a_{ii} = 0$ , $a_{ji} = -a_{ij}$ ; eine Matrix, welche diese Bedingungen erfüllt nennt man ***alternierend*** oder ***schiefsymmetrisch***.

**Satz:** ***Jede alternierende Bilinearform auch antisymmetrisch.***

**Beweis:**
Man betrachte $g(x+y, x+y) = 0$ , da g alternierend ist.
Weiter ist g linear in jedem der beiden Argumente, also erhält man:
$g(x+y, x+y) = g(x, x) + g(x, y) + g(y, x) + g(y, y)$
und umstellen liefert
$g(x, y) + g(y, x) = g(x+y, x+y) - g(x, x) - g(y, y) = 0$
da g alternierend ist gilt weiter:
$g(x, y) + g(y, x) = 0$
Somit also $g(x, y) = -g(y, x)$ .

■

**Definition 7:**
Die ***Charakteristik*** ist eine Kennzahl eines Ringes oder Körpers. Sie gibt an, wie oft man die im Ring bzw. Körper enthaltene Zahl 1 aufaddieren muss, um als Ergebnis 0 zu erhalten.
Somit ist sie die kleinste natürliche Zahl $n > 1$ , für die die $n$-fache Summe des Einselementes 1 gleich dem Nullelement wird, also

$1 + 1 + \ldots + 1 = 0$ (n-mal).

Merke: Ist jede endliche Summe von Einsen ungleich Null (wie das zum Beispiel bei den reellen Zahlen der Fall ist), dann wird dem Körper definitionsgemäß die Charakteristik 0 zugeordnet.

**Satz:**
***Bei Charakteristik ungleich 2 müssen wir nicht zwischen alternierenden und antisymmetrischen Formen unterscheiden.***

**Beweis:**
Falls g eine antisymmetrische Form ist, müssen wir y=x (in (13)) setzen, dann gilt $2g(x,x)=0$ . Falls der zugrundeliegende Körper Charakteristik ungleich 2 hat folgern wir, dass g alternierend sein muss.

■

**Bemerkung:**
Falls die Charakteristik gleich 2 ist gilt diese Schlussfolgerung nicht, und da wir uns nicht wünschen den Körper einzuschränken, werden wir die stärkere Aussage (12) verwenden.

**Definition:**
Falls Charakteristik ungleich 2 gilt, ist eine Matrix ***alternierend*** ist falls $A^T=-A$ .

**Theorem 3:**
***Gegeben sei eine alternierende Bilinearform g auf einem Raum V (über einem beliebigen Körper), diese Form hat geraden Rang. Sei A ihre Darstellungsmatrix bzgl. der Basis*** $e_1,\ldots,e_n$ ***. Dann existiert eine invertierbare Matrix U, so dass gilt***

$$UAU^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (14)$$

**Ziel:**
Wir werden zeigen, dass V eine Basis $u_1,\ldots,u_r,v_1,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_s$ hat, mit dimV=2r+s, Rang g=2r. Des Weiteren soll gelten $g(u_i,v_i)=-g(v_i,u_i)=1$ , während alle anderen Werte gleich Null sind. (Genau dass soll das Theorem aussagen.)

**Beweisidee:**
**Führe eine Induktion nach dem Rang von A:**

Falls $rk(A)=0$ so folgt g=0. Also A=0 (Nullmatrix) . Dann gilt mit U=I (Einheitsmatrix) die Behauptung.

Falls $rk(A)\neq 0$ nehme $u,v\in V$ so, dass $g(u,v)\neq 0$ , dann erhalten wir mit Dividieren von x oder y durch g(x,y) Vektoren $u_1,v_1$ dass gilt $g(u_1,v_1)=1$ .
Das heißt z.B.:

$$Falls\ u_1=\frac{u}{g(u,v)}\ und\ v=v_1,\ dann\, gilt\ g(u_1,v_1)=g(\frac{u}{g(u,v)},v)=\frac{1}{g(u,v)}\cdot g(u,v)=1$$

Wir bemerken, dass $u_1$ *und* $v_1$ linear unabhängig sein müssen, damit falls $v_1=\lambda u_1$ gilt $g(u_1,v_1)=g(u_1,\lambda u_1)=\lambda g(u_1,u_1)=0$ , ein **Widerspruch**.

Sei $V_1$ der Raum welcher durch $u_1$ *und* $v_1$ erzeugt wird
und sei $U=\{z\in V \mid g(z,u_1)=g(z,v_1)=0\}$ .Genauer ist U ein Unterraum von V.

Dann ist klar, dass $Span(u_1, v_1) \cap U = 0$ .
Zeige:
1.)V= $Span(u_1, v_1) + U$
2.) Jedes $x \in V$ kann geschrieben werden als $x = g(x, v_1) u_1 + g(u_1, x) v_1 + x'$ , für einen eindeutigen Vector x'.
3.) $x' \in U$
Aus 1.), 2.) und 3.)folgt $V = V_1 \oplus U$ .
Weiter gilt, jeder Vektor aus U ist orthogonal zu jedem Vektor in $V_1$ .
Demnach gilt dimU= dimV-2, und nun folgt die Behauptung durch Induktion in dimV.

■