

Proseminar zur Linearen Algebra

Normalformen von Matrizen

Jordansche Normalform

Dozent: Prof. Dr. Oleg Bogopolski

Referent: Benedikt Bojda

WS 2008/09

Normalformen von Matrizen - Jordansche Normalform

1) Matrizen linearer Abbildungen

1.1 Definition

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum der Dimension n und $\varphi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Wir stellen die Vektoren $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ in der Standardbasis $e := \{e_1, \dots, e_n\}$ dar:

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= \alpha_{11}e_1 + \dots + \alpha_{1n}e_n \\ &\dots \\ \varphi(e_n) &= \alpha_{n1}e_1 + \dots + \alpha_{nn}e_n\end{aligned}$$

Die Matrix (α_{ij}) heißt *Darstellungsmatrix von φ bzgl. der Basis e* . Sie wird mit $[\varphi]_e := (a_{ij})$ bezeichnet.

1.2 Definition

Sei $v := \{v_1, \dots, v_n\}$ eine weitere Basis von V . Dann kann diese Basis in der Standardbasis dargestellt werden:

$$\begin{aligned}v_1 &= \beta_{11}e_1 + \dots + \beta_{1n}e_n \\ &\dots \\ v_n &= \beta_{n1}e_1 + \dots + \beta_{nn}e_n\end{aligned}$$

Die Matrix $T := (\beta_{ij})$ heißt *Übergangsmatrix von e zu v* .

1.3 Satz

Sei $\varphi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, $[\varphi]_e, [\varphi]_v$ Darstellungsmatrizen von φ bzgl. der Basen e und v und $T = (\beta_{ij})$ die Übergangsmatrix von e zu v . Dann gilt:

$$[\varphi]_v = T^{-1} [\varphi]_e T$$

2) Jordansche Normalform für nilpotente Abbildungen

2.1 Definition

Eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ heißt *nilpotent*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\varphi \neq 0, \varphi^2 \neq 0, \dots, \varphi^{k-1} \neq 0, \varphi^k = 0.$$

2.2 Definition

Eine φ -Tabelle ist eine nicht-leere Tabelle der Form

v_1	v_2	v_3	\dots	v_k
	v_{k+1}	v_{k+2}	\dots	v_l
		\dots	\dots	\dots
		v_{m+1}	\dots	v_n

mit:

1) Tabelle ist rechtsbündig

2) Für die Elemente der Tabelle gilt: $v_i \in V$

3) Für jede Zeile v_s, v_{s+1}, \dots, v_t gilt: $v_s \xrightarrow{\varphi} v_{s+1} \xrightarrow{\varphi} v_{s+2} \xrightarrow{\varphi} \dots \xrightarrow{\varphi} v_t \xrightarrow{\varphi} 0$

2.3 Lemma

Sind die Vektoren v_k, v_l, \dots, v_n der letzten Spalte der φ -Tabelle linear unabhängig, so sind alle Vektoren der Tabelle linear unabhängig.

Beweis:

Sei

	v_1	v_2	v_3
		v_4	v_5
v_6	v_7	v_8	v_9

eine φ -Tabelle, wobei

v_3, v_5, v_9 linear unabhängig sind. Betrachten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \\
 (1) \quad & + \alpha_4 v_4 + \alpha_5 v_5 \\
 & + \alpha_6 v_6 + \alpha_7 v_7 + \alpha_8 v_8 + \alpha_9 v_9 = 0
 \end{aligned}$$

Anwenden von φ liefert:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \varphi(v_1) + \alpha_2 \varphi(v_2) + \alpha_3 \varphi(v_3) \\
 & + \alpha_4 \varphi(v_4) + \alpha_5 \varphi(v_5) \\
 & + \alpha_6 \varphi(v_6) + \alpha_7 \varphi(v_7) + \alpha_8 \varphi(v_8) + \alpha_9 \varphi(v_9) = 0 \\
 (2) \quad & \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 v_2 + \alpha_2 v_3 + \alpha_3 0 \\
 & + \alpha_4 v_5 + \alpha_5 0 \\
 & + \alpha_6 v_7 + \alpha_7 v_8 + \alpha_8 v_9 + \alpha_9 0 = 0
 \end{aligned}$$

Erneutes Anwenden von φ liefert:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \varphi(v_2) + \alpha_2 \varphi(v_3) \\
 & + \alpha_4 \varphi(v_5) \\
 & + \alpha_6 \varphi(v_7) + \alpha_7 \varphi(v_8) + \alpha_8 \varphi(v_9) = 0 \\
 (3) \quad & \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 v_3 + \alpha_2 0 \\
 & + \alpha_4 0 \\
 & + \alpha_6 v_8 + \alpha_7 v_9 + \alpha_8 0 = 0
 \end{aligned}$$

Erneutes Anwenden von φ liefert:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \varphi(v_3) \\
 & + \alpha_6 \varphi(v_8) + \alpha_7 \varphi(v_9) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \\
 (4) \quad & \alpha_1 0 \\
 & + \alpha_6 v_9 + \alpha_7 0 = 0 \\
 & \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\alpha_6 v_9 = 0$$

Da v_9 linear unabhängig ist, also $v_9 \neq 0$ gilt, folgt: $\alpha_6 = 0$.

Setzen wir dies in (3) ein, so erhalten wir die Gleichung $\alpha_1 v_3 + \alpha_7 v_9 = 0$, wobei wieder v_3, v_9 linear unabhängig sind und somit $\alpha_1 = \alpha_7 = 0$ folgt. Setzen wir nun $\alpha_1, \alpha_6, \alpha_7$ in (2) ein, so erhalten wir: $\alpha_2 v_3 + \alpha_4 v_5 + \alpha_8 v_9 = 0$. Aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren folgt: $\alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_8 = 0$. Setzen wir nun noch $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_7 = \alpha_8 = 0$ in (1) ein, so erhalten wir letztlich: $\alpha_3 v_3 + \alpha_5 v_5 + \alpha_9 v_9 = 0$, wobei auch hier die lineare Unabhängigkeit $\alpha_1 = \alpha_5 = \alpha_9 = 0$ liefert. Insgesamt folgt also: $\alpha_1 = \dots = \alpha_9 = 0$ und somit die lineare Unabhängigkeit von v_1, \dots, v_9 .

Ziel: Da die Vektoren in der letzten Spalte der φ -Tabelle i.d.R. nicht linear unabhängig sind, wollen wir eine φ -Tabelle konstruieren, für welche diese Bedingung erfüllt ist.

2.4 Definition

Mit folgenden Operationen können wir eine φ -Tabelle in eine neue überführen:

- (ET1) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\alpha \neq 0$
- (ET2) Addieren eines Teils einer längeren Zeile zu einer kürzeren
- (ET3) Streichen eines Kästchens, das den Nullvektor enthält und die Tabelle rechtsbündig machen

Diese Operationen nennt man *elementare Transformationen*.

2.5 Lemma

- i) Mit Hilfe der elementaren Transformationen kann man die letzte Spalte einer φ -Tabelle linear unabhängig machen.
- ii) Die elementaren Transformationen verändern den Spann der φ -Tabelle nicht

Beweis:

„i)“ Um dies zu beweisen konstruieren wir einen Algorithmus:

- 1) Stelle mit den Vektoren v_1, \dots, v_m der letzten Spalte der φ -Tabelle die 0 dar:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

- 2) Sind hierbei alle $\alpha_i = 0$ ($i=1, \dots, m$), so sind die Vektoren linear unabhängig und wir sind fertig.

- 3) Sind nicht alle $\alpha_i = 0$ ($i=1, \dots, m$), so wähle diejenigen Vektoren v_{i_j} mit $\alpha_{i_j} \neq 0$ und stelle folgende Linearkombination auf:

$$(*) \alpha_{i_1} v_{i_1} + \dots + \alpha_{i_s} v_{i_s} = 0$$

- 4) Wähle jenes v_{i_j} , welches in der kürzesten Zeile der Tabelle steht und löse die

Gleichung (*) danach auf. O.B.d.A. sei dies v_{i_1} : $v_{i_1} = \frac{1}{\alpha_{i_1}} (-\alpha_{i_2} v_{i_2} - \dots - \alpha_{i_s} v_{i_s})$.

Wenden wir nun (ET1) auf die Zeilen von v_{i_2}, \dots, v_{i_s} an und mit diesen Zeilen dann (ET2) auf die Zeile von v_{i_1} , so erhalten wir:

$$v_{i_1} + \frac{\alpha_{i_2}}{\alpha_{i_1}} v_{i_2} + \dots + \frac{\alpha_{i_s}}{\alpha_{i_1}} v_{i_s} = 0$$

Die Anzahl der Vektoren in der Tabelle sinkt also um eins.

5) Beginne bei 1)

„ii)“ Seien v_1, \dots, v_m die Vektoren der φ -Tabelle und $sp(v_1, \dots, v_m)$ deren Spann.

„(ET1)“: Z.Z.: $sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m) = sp(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m)$

Bew.: Sei $x \in sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m)$, d.h.

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + \frac{\alpha_i}{\lambda} (\lambda v_i) + \dots + \alpha_m v_m$$

$$\Rightarrow x \in sp(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m)$$

$$\Rightarrow sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m) \subseteq sp(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m)$$

Sei $x \in sp(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m)$, d.h.

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i \lambda v_i + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i' v_i + \dots + \alpha_m v_m$$

$$\Rightarrow x \in sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m)$$

$$\Rightarrow sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m) \supseteq sp(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m)$$

Insgesamt folgt: $sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_m) = sp(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_m)$.

„(ET2)“: Z.Z.: $sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) = sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_m)$

Bew.: Sei $x \in sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m)$ d.h.

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + (\alpha_i' \alpha_j) v_i + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i' v_i + \dots + \alpha_j v_j + \alpha_j v_i + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i' v_i + \dots + \alpha_j (v_j + v_i) + \dots + \alpha_m v_m$$

$$\Rightarrow x \in sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_m)$$

$$\Rightarrow sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) \subseteq sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_m)$$

Sei $x \in sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_m)$ d.h.

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_j (v_j + v_i) + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \dots + \alpha_j v_j + \alpha_j v_i + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i v_i + \alpha_j v_i + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + (\alpha_i + \alpha_j) v_i + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_m v_m$$

$$= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i' v_i + \dots + \alpha_j v_j + \dots + \alpha_m v_m$$

$$\Rightarrow x \in sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m)$$

$$\Rightarrow sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) \supseteq sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_m)$$

Es folgt: $sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m) = sp(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + v_i, \dots, v_m)$

„(ET3)“: Z.Z.: $sp(v_1, \dots, v_m) = sp(v_1, \dots, 0, \dots, v_m)$

Bew: Sei $x \in sp(v_1, \dots, v_m)$ d.h.

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \\ &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i 0 + \dots + \alpha_m v_m \\ \Rightarrow x &\in sp(v_1, \dots, 0, \dots, v_m) \\ \Rightarrow sp(v_1, \dots, v_m) &\subseteq sp(v_1, \dots, 0, \dots, v_m) \end{aligned}$$

Sei $x \in sp(v_1, \dots, 0, \dots, v_m)$ d.h.

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_i 0 + \dots + \alpha_m v_m \\ &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m \\ \Rightarrow x &\in sp(v_1, \dots, v_m) \\ \Rightarrow sp(v_1, \dots, v_m) &\supseteq sp(v_1, \dots, 0, \dots, v_m) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt: $sp(v_1, \dots, v_m) = sp(v_1, \dots, 0, \dots, v_m)$

2.6 Satz

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum der Dimension n und $\varphi: V \rightarrow V$ eine nilpotente lineare Abbildung. Dann existiert eine Basis $v := \{v_1, \dots, v_n\}$ von V , so dass die Darstellungsmatrix von φ bzgl. dieser Basis v folgende Jordansche Normalform hat:

$$[\varphi]_v := \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}$$

wobei jeder Block J_i ($i=1, \dots, k$) ein *elementarer Nilpotenzblock* der folgenden Gestalt ist:

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis:

Wir betrachten die Standardbasis $e := \{e_1, \dots, e_n\}$ von V . Da φ nilpotent ist gilt

$$\begin{aligned} e_1 &\xrightarrow{\varphi} \varphi(e_1) \xrightarrow{\varphi} \dots \xrightarrow{\varphi} \varphi^{r_1}(e_1) \xrightarrow{\varphi} 0 \\ e_2 &\xrightarrow{\varphi} \varphi(e_2) \xrightarrow{\varphi} \dots \xrightarrow{\varphi} \varphi^{r_2}(e_2) \xrightarrow{\varphi} 0 \\ &\vdots \\ e_n &\xrightarrow{\varphi} \varphi(e_n) \xrightarrow{\varphi} \dots \xrightarrow{\varphi} \varphi^{r_n}(e_n) \xrightarrow{\varphi} 0 \end{aligned}$$

Die obigen Vektoren erfüllen die Bedingungen für Elemente einer φ -Tabelle, also existiert folgende φ -Tabelle:

e_1	$\varphi(e_1)$...	$\varphi^{r_1}(e_1)$
	e_2	...	$\varphi^{r_2}(e_2)$

	e_n	...	$\varphi^{r_n}(e_n)$

Für die Vektoren $\{e_1, \dots, \varphi^{r_n}(e_n)\}$ der φ -Tabelle gilt: $sp(e_1, \dots, \varphi^{r_n}(e_n)) = V$, da der Spann die Basisvektoren enthält. Nach Lemma 2.5.i) kann man nun die letzte Spalte der Tabelle mit Hilfe von elementaren Transformationen linear unabhängig machen. Dann ist nach Lemma 2.3 die gesamte Tabelle linear unabhängig. Da nach Lemma 2.5.ii) der Spann der Vektoren unter elementaren Transformationen erhalten bleibt, gilt für die Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ der Tabelle

	v_k	...	v_1
v_l	v_{k+1}
	
	v_n	...	v_{m+1}

$sp(v_1, \dots, v_n) = V$. Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig sind und sie V aufspannen, haben wir eine Basis gefunden.

Sei eine solche Tabelle z.B.:

	v_2	v_1
v_5	v_4	v_3
	v_7	v_6
		v_8

Dann gilt:

$$\begin{aligned} v_1 &\xrightarrow{\varphi} 0; v_2 \xrightarrow{\varphi} v_1 \\ v_3 &\xrightarrow{\varphi} 0; v_4 \xrightarrow{\varphi} v_3 \\ v_5 &\xrightarrow{\varphi} v_4; v_6 \xrightarrow{\varphi} 0 \\ v_7 &\xrightarrow{\varphi} v_6; v_8 \xrightarrow{\varphi} 0 \end{aligned}$$

Erstellen wir nun die Matrix $[\varphi]_v$, so erhalten wir:

$$[\varphi]_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also die gewünschte Form.

2.7 Beispiel

Sei $\varphi: V \rightarrow V; v \mapsto Av$ mit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung. Diese ist

nilpotent, da $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt. Wir bilden die Einheitsvektoren

immer wieder mit φ ab, bis der Bildvektor auf 0 abgebildet wird:

$$e_1 = (1,0,0)^T \mapsto (0,0,0)^T$$

$$e_2 = (0,1,0)^T \mapsto (1,0,0)^T \mapsto (0,0,0)^T$$

$$e_3 = (0,0,1)^T \mapsto (2,1,0)^T \mapsto (1,0,0)^T \mapsto (0,0,0)^T$$

Wir erhalten folgende φ -Tabelle:

		1,0,0
	0,1,0	1,0,0
0,0,1	2,1,0	1,0,0

 \Rightarrow

		0,0,0
	0,1,0	1,0,0
0,0,1	2,1,0	1,0,0

 \Rightarrow

	-2,0,0	0,0,0
0,0,1	2,1,0	1,0,0

 \Rightarrow

		-2,0,0
0,0,1	2,1,0	1,0,0

0,0,1	2,1,0	1,0,0
-------	-------	-------

Somit erhalten wir als Basis $v = \{(1,0,0)^T, (2,1,0)^T, (0,0,1)^T\}$.

Bilden wir diese mit φ ab, so erhalten wir:

$$(1,0,0)^T \xrightarrow{\varphi} (0,0,0)^T$$

$$(2,1,0)^T \xrightarrow{\varphi} (1,0,0)^T = v_1 \Rightarrow [\varphi]_v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(0,0,1)^T \xrightarrow{\varphi} (2,1,0)^T = v_2$$

Bilden wir nun die Transformationsmatrix von e zu v , indem wir die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ in der Standardbasis darstellen. Dann erhalten wir die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 1.3 gilt $[\varphi]_v = T^{-1}[\varphi]_e T$. Also müssen wir in der Gleichung $T[\varphi]_v = [\varphi]_e T$ zwei gleiche Matrizen erhalten. Dies lässt sich leicht nachrechnen.

3) Jordansche Normalform für lineare Abbildungen

3.1 Definition

Ein Untervektorraum U von V heißt φ -invariant, wenn gilt: $\varphi(U) \subseteq U$.

3.2 Satz (Zerlegungssatz)

Zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_\varphi(\lambda)$ der Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von φ , so gibt es eine φ -invariante Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k, \text{ mit } V_i := \text{Kern} \left(\underbrace{(\varphi - \lambda_i \text{id})^{k_i}}_{\Psi_i := \varphi - \lambda_i \text{id}} \right) = \text{Kern}(\Psi_i^{k_i})$$

und V_i Ψ_i -invariant ($i=1, \dots, k$). Darüber hinaus ist Ψ_i nilpotent auf V_i .

3.3 Satz

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum der Dimension n und $\varphi: V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Dann existiert eine Basis $v := \{v_1, \dots, v_n\}$ von V , so dass die Darstellungsmatrix von φ bzgl. dieser Basis v folgende Jordansche Normalform hat:

$$[\varphi]_v := \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix}$$

wobei jeder Block J_i ($i=1, \dots, k$) ein *elementarer Jordanblock* der folgenden Gestalt ist:

$$J_i := \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \text{ Eigenwert von } \varphi)$$

Beweis:

Da wir uns über dem Körper \mathbb{C} befinden, zerfällt das charakteristische Polynom $\chi_\varphi(\lambda)$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra in Linearfaktoren. Dann können wir den Zerlegungssatz anwenden und V wie folgt zerlegen: $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$. Hierbei gilt wie in

Satz 3.2: $V_i := \text{Kern} \left(\underbrace{(\varphi - \lambda_i \text{id})^{k_i}}_{\Psi_i := \varphi - \lambda_i \text{id}} \right) = \text{Kern}(\Psi_i^{k_i})$, wobei V_i Ψ_i -invariant ist ($i=1, \dots, k$).

Die Nilpotenz von Ψ_i nutzen wir aus, um auf den einzelnen UVRen V_i den Satz 2.6 anwenden zu können. Dieser Satz sagt aus, dass es in jedem UVR eine Basis $v := \{v_1, \dots, v_n\}$ gibt, so dass die Matrix $[\Psi_i]_v$ die folgende Gestalt hat:

$$[\Psi_i]_v = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i & \ddots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Da $\Psi_i = (\varphi - \lambda_i id)|_{V_i}$ gilt, folgt:

$$[\varphi|_{V_i}] - [(\lambda_i id)|_{V_i}] = [\Psi_i] \Leftrightarrow [\varphi|_{V_i}] = [\Psi_i] + [(\lambda_i id)|_{V_i}]$$

In Matrizen sieht dies wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & \ddots & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & & \\ \hline & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ccccccc} \lambda_i & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccccc} \lambda_i & 1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & & & & \lambda_i \end{array} \right)$$

Da $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ gilt, folgt:

$$[\varphi]_v = \left(\begin{array}{ccc|ccc} [\varphi|_{V_1}] & & & & & \\ \hline & \ddots & & & & \\ \hline & & & [\varphi|_{V_k}] & & \end{array} \right)$$