

## Fox-Calculus und Moduln

**Aufgabe 1.** Kalkulieren Sie die folgenden Ableitungen:

1)  $\frac{\partial}{\partial z}(xyz^2x^{-1}y^{-1}z^{-2}),$

2)  $\frac{\partial}{\partial x}[x^n, y],$

3)  $\frac{\partial}{\partial x}[x, y]^n.$

**Aufgabe 2.** Sei  $w = w(x_1, \dots, x_n)$ . Beweisen Sie die folgende Formel:

$$w - e = \sum_{i=1}^n (x_i - e) \cdot \frac{\partial w}{\partial x_i}.$$

**Aufgabe 3.** Sei  $G = \langle a \rangle$  eine unendliche zyklische Gruppe.

(1) Beweisen Sie, dass in dem  $G$ -Modul  $\mathbb{Z}G$  gilt

$$\langle e + a^2, a^4 + a^7 \rangle_G = \langle a + e, a - e \rangle_G.$$

(2) Ob die  $G$ -Moduln  $\langle a + e, a - e \rangle_G$  und  $\mathbb{Z}G$  gleich sind?

(3) Ob der  $G$ -Modul  $\langle a + e, a - e \rangle_G$  frei ist?

*Definition.* Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$  ein Trivialisierungs- $G$ -Homomorphismus ( $\varepsilon(g) = 1$  für alle  $g \in G$ ). Das  $G$ -Modul  $\text{Ker } \varepsilon$  heißt *Augmentationsideal*.

**Aufgabe 4.** Beweisen Sie, dass das Augmentationsideal der freien Gruppe  $F(X)$  ein freies Modul mit der Basis  $\{x - e \mid x \in X\}$  ist.