Übungszettel 5

Repräsentationen der Gruppen

Definition. Ein Kommutator der Elemente x, y ist $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Eine Kommutator–Untergruppe einer Gruppe G ist $G' = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$.

Aufgabe 1. Sei $G = F(a, b)$.
a) Finden Sie ein Schreier–Transversal von G' in G.
b) Finden Sie eine Basis von G'.

Aufgabe 2. Finden Sie eine Repäsentation der Gruppe A_4.

Aufgabe 3. Finden Sie eine Repräsentation der Gruppe S_4.

Aufgabe 4. Definieren wir einen Epimorphismus $\varphi : \langle a, b \mid a^2 = b^3 \rangle \to S_3$ nach der Regel $\varphi(a) = (12)$, $\varphi(b) = (123)$.
a) Finden Sie eine Repräsentation von $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\varphi) \cong F_2 \times \mathbb{Z}$ ist, wobei F_2 eine freie Gruppe des Ranges 2 ist.

Aufgabe 5. Definieren wir einen Epimorphismus $\langle a, b \mid a^3, b^3, (ab)^3 \rangle \to \mathbb{Z}_3$ nach der Regel $\varphi(a) = \varphi(b) = 1$.
a) Finden Sie eine Repräsentation von $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist.