Übungszettel 4

Untergruppen der freien Gruppen und ihre Überschneidungen

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass $F(a, b)$ Untergruppen aller endlichen Indexe und aller endlichen Ränge enthält.

Aufgabe 2. Sei H die Überschneidung aller Untergruppen des Indexes 2 in $F(a, b)$.
1) Finden Sie eine Basis von H.
2) Finden Sie den Index von H in $F(a, b)$.
3) Beweisen Sie, dass H normal in $F(a, b)$ ist.
4) Finden Sie $F(a, b)/H$.

Aufgabe 3.
Seien $H_1 = \langle ab, a^2, ba\rangle$ und $H_2 = \langle aba^{-1}, a^2b, a^3, a^2b^{-1}\rangle$ zwei Untergruppen von $F(a, b)$.
1) Finden Sie eine Basis von $H_1 \cap H_2$.
2) Finden Sie den Index von $H_1 \cap H_2$.
3) Ob das Wort $a^2b^7a^{-5}b^6$ in H_2 liegt?

Aufgabe 4. Finden Sie eine Untergruppe des endlichen Indexes in $F(a, b)$, so dass das Wort $ab^2a^{-1}b^{-2}$ nicht in dieser Gruppe liegt.

Aufgabe 5. Sei w ein Wort in $F(X)$ der Länge n. Beweisen Sie, dass es eine Untergruppe H gibt, die einen endlichen Index in $F(X)$ hat und w außer H liegt.

Aufgabe 6. Beweisen Sie, dass die Überschneidung aller Untergruppen der endlichen Indexe trivial ist.

Aufgabe 7.
1) Bestätigen Sie, dass es genau 13 Untergruppen des Indexes 3 in $F(a, b)$ gibt.
2) Wie viele normale Untergruppen des Indexes 3 in $F(a, b)$ gibt es?