Übungszettel 3

Untergruppen der freien Gruppen. Cayley-Graphen

Aufgabe 1.
a) Beweisen Sie, dass $\langle a^2, b^2, ab \rangle$ eine Untergruppe von Index 2 in $F(a, b)$ ist.
b) Finden Sie noch eine Untergruppe von Index 2 in $F(a, b)$.
c) Beweisen Sie, dass genau 3 Untergruppen von Index 2 in $F(a, b)$ existieren.
d) Finden Sie alle 3 Untergruppen von Index 2 in $F(a, b)$.

Aufgabe 2. Skizzieren Sie den Cayley-Graph der Gruppe G bezüglich des Systems S von Erzeugenden:
1) $G = \mathbb{Z}$, $S = \{2, 3\}$;
2) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, $S = \{a, b\}$;
3) $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$, $S = \{a, b, c\}$;
4) $G = A_4$, $S = \{(12)(34), (123)\}$.
5) G ist die Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}$, $S = \{a, b\}$, wobei $a(n) = n+1$, $b(n) = -n$, $n \in \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3. 1) Wie groß ist der Index der Untergruppe $H = \langle a, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, b^3 \rangle$ in der Gruppe $F(a, b)$?
2) Sei Γ Cayley-Graph von $F(a, b)$ bezüglich $\{a, b\}$. Die Gruppe H operiert auf Γ durch linke Multiplikation. Skizzieren Sie den Faktorgraph $H\backslash\Gamma$.
3) Ist H eine normale Untergruppe von $F(a, b)$?

Aufgabe 4. 1) Beweisen Sie, dass die Untergruppe $H = \langle a^2, b \rangle$ unendliche Index in der Gruppe $F(a, b)$ hat.
2) Skizzieren Sie den Faktorgraph $H\backslash\Gamma$, wobei Γ in der Aufgabe 3 definiert ist.