Übungszettel 1

Elementare Eigenschaften der freien Gruppen

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass
1) $\{a^{-1}ba^{-1}b^2a,\ a^{-1}ba^{-1}b^3a^{-1}ba\}$ eine Basis der freien Gruppe $F(a,b)$ ist,
2) $\{a^2b^3,\ a^4b^5\}$ keine Basis der freien Gruppe $F(a,b)$ ist.

Aufgabe 2. Wie viele irreduzible Elemente der Länge n gibt es
a) in der freien Gruppe $F(a,b)$,
b) in einer freien Gruppe des Ranges m?

Aufgabe 3. Sei $1 \neq a$ ein Element der freien Gruppe $F(X)$. Beweisen Sie, dass Folgendes gilt:
a) $|a^2| > |a|$,
b) $|a^{i+1}| - |a^i|$ hängt nicht von i ab,
c) es existiert nur eine endliche Anzahl der Wurzel von a:

$$|\{f \in F \mid f^n = a \text{ für einige } n \in \mathbb{Z}\}| < \infty.$$

Aufgabe 4. Seien a, b zwei Elemente einer freien Gruppe F mit $a^n = b^n$.
Beweisen Sie, dass $a = b$ gilt.

Aufgabe 5. Seien a, b zwei Elemente einer freien Gruppe F mit $ab = ba$.
Beweisen Sie, dass $z \in F$ existiert, so dass $a = z^k, b = z^l$ für einige $k, l \in \mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 6. Seien a, b, c drei Elemente einer freien Gruppe F mit $ab = ba$, $bc = cb$. Beweisen Sie, dass $ac = ca$ gilt.